TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Définition

On appelle fonction trinôme du second degré, toute fonction f définie sur IR qui, à x associe
$f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b et c étant trois réels avec $a \neq 0$.

Exemple

Les fonctions f, g, h définies sur IR par : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; $g(x) = -3x^2 - x$; $h(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}$
sont des fonctions trinômes du second degré.

Remarques

- On utilisera parfois l'expression "trinôme" au lieu de "trinôme du second degré".
L'expression sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée forme développée de la fonction trinôme.
Il existe d'autres expressions :
la forme canonique : $f(x) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$ (α et β étant deux réels)
et dans certains cas la forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (x_1 et x_2 étant deux réels)
- Plus généralement on appelle fonction polynôme de degré n ($n \in$ IN*) , une fonction f définie sur IR par :
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, a_n ; a_{n-1} ; … ; a_1 ; a_0 étant des réels avec $a_n \neq 0$.
Exemples : f définie par $f(x) = -2x^5 + 3x^4 + x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme de degré 5 .
g définie par $g(x) = \frac{1}{2}x^6 - x\sqrt{3}$ est une fonction polynôme de degré 6.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

1°) a) Justifier que les expressions : $2x^2 + 4x - 30$; $2\left[(x + 1)^2 - 16\right]$; $2(x - 3)(x + 5)$
sont trois formes de la même fonction trinôme f.
b) Calculer $f(0)$; $f(3)$; $f(-5)$; $f(-1)$; $f(-2)$
2°) a) Justifier que les expressions : $x^2 + 4x + 5$ et $(x + 2)^2 + 1$
sont deux formes de la même fonction trinôme g.
b) Démontrer que $g(x)$ est strictement positif pour tout réel x.
c) Est-il possible de trouver une forme factorisée de g ?

Exercice 02 (voir réponses et correction)

On considère la fonction trinôme g dont la forme canonique est $g(x) = 3\left[(x - 1)^2 - 9\right]$
1°) Déterminer la forme développée et la forme factorisée de g.
2°) Calculer $g(0)$; $g(1)$; $g(4)$; $g(\sqrt{2})$.
3°) Résoudre l'équation $g(x) = 0$

Définition

On appelle racine d'une fonction trinôme f tout réel x_0 pour lequel $f(x_0) = 0$.

Remarque

Les racines d'une fonction trinôme f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
(Ne pas confondre "racine" avec "racine carrée")

Exercice 03 (voir réponses et correction)

Montrer que le trinôme $-x^2 + 2x + 1$ a pour racine $1 - \sqrt{2}$.

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Déterminer un trinôme du second degré dont 1 et -3 soient racines.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

Répondre par V (Vrai) ou F (Faux). Justifier.

1°) On considère la fonction trinôme f définie par $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$

	f a pour racine 1		f a pour racine -1		f a pour forme canonique $2\left[(x-2)^2 - 6\right]$

2°) On considère la fonction trinôme g définie par $g(x) = 2(x-3)(x+2)$

	g a pour racine 2		$g(4) = 12$		$g(x)$ a pour forme développée $4x^2 - 4x - 24$

Exercice 06 (voir réponses et correction)

Soit $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 5$. Calculer $f(1)$.
Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

On considère la fonction polynôme f définie par $f(x) = 2x^3 + 8x^2 - 16x - 64$.

1°) Démontrer que f a une racine entière α.
(On pourra s'aider d'un graphique ou d'un tableau de valeurs obtenus avec une calculatrice)

2°) Montrer que l'on peut écrire $f(x) = (x-\alpha)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.

3°) En déduire toutes les racines de f.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

Résoudre les équations du second degré

1°) $x^2 - 6x = 0$ 2°) $x^2 - 9 = 0$ 3°) $x^2 + 5x = 0$

4°) $2x^2 + 7 = 0$ 5°) $3x^2 - 9 = 0$ 6°) $2x^2 - 7x = 0$

Exercice 09 (voir réponses et correction)

1°) Déterminer des réels α et β tels que $x^2 - 4x + 2 = (x-\alpha)^2 + \beta$.

2°) En déduire une factorisation de $x^2 - 4x + 2$, puis déterminer les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 2 = 0$.

3°) Déterminer des réels α et β tels que $x^2 - 4x + 5 = (x-\alpha)^2 + \beta$.
Que peut-on en conclure pour l'équation $x^2 - 4x + 5 = 0$?

Exercice 10 (voir réponses et correction)

1°) Compléter :

$x^2 - 2x + 1 = (x - \ldots)^2$

$x^2 + 4x + 4 = (x + \ldots)^2$

$x^2 + 6x + \ldots = (x + \ldots)^2$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = (x - \ldots)^2$

$x^2 - \ldots x + \frac{9}{4} = (x - \ldots)^2$

$x^2 + \frac{1}{2}x + \ldots = (x + \ldots)^2$

2°) Compléter :

$x^2 - 2x + 3 = (x - \ldots)^2 + \ldots$

$x^2 + 4x - 5 = (x + \ldots)^2 - \ldots$

$x^2 + 6x - 1 = (x + \ldots)^2 - \ldots$

$x^2 - x + 2 = (x - \ldots)^2 + \ldots$

$x^2 - 3x + 4 = (x - \ldots)^2 + \ldots$

$x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = (x + \ldots)^2 + \ldots$

3°) Résoudre les équations

$x^2 - 2x + 3 = 0$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

Remarque

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

On peut écrire $f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right]$

donc $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Définition

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant du trinôme et on note Δ le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarques

- L'écriture $f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ est appelée forme canonique du trinôme.
- L'expression de la forme canonique n'a pas a être mémorisée, mais il faut savoir la retrouver sur des exemples.
- Il faut impérativement connaître l'expression du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 11 (voir réponses et correction)

Donner la forme canonique de $2x^2 - 4x + 8$. En déduire que $2x^2 - 4x + 8 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Même question avec $3x^2 + x + 1$.

Propriété

(voir démonstration 01)

On considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Soit Δ son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines.
  Le trinôme ne peut pas se factoriser.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
  Le trinôme peut se factoriser sous la forme $f(x) = a\,(x - x_0)^2$
- Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines x_1 et x_2 qui sont égales à : $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Le trinôme peut se factoriser sous la forme $f(x) = a\,(x - x_1)(x - x_2)$

Remarques

- L'utilisation du discriminant Δ permet de résoudre toutes les équations du second degré, mais dans le cas d'équations simples il n'est pas judicieux de l'employer.
- **Attention**, l'utilisation du discriminant concerne uniquement les équations du second degré.
  On ne peut pas l'utiliser dans d'autres cas (équation du troisième degré par exemple).

Exemple

Les équations $x^2 + 1 = 0$; $x^2 - 2x = 0$; $2x^2 - 4 = 0$; $3x^2 + 9x = 0$ sont des équations simples pour lesquelles l'utilisation du discriminant n'est pas utile.

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Pour les équations du second degré ci-dessous, cocher la case quand l'utilisation du discriminant est utile.
Résoudre ensuite chacune des équations.

$x^2 + 2x - 3 = 0$		$x^2 - 5x = 0$		$2x^2 - x + 1 = 0$	
$-x^2 + 5x - 6 = 0$		$3x^2 + 21x + 30 = 0$		$4 - 5x^2 = 0$	

Exercice 13 (voir réponses et correction)

Pour les équations du second degré ci-dessous, cocher la case quand l'utilisation du discriminant est utile.
Résoudre ensuite chacune des équations.

$9x^2 - 24x + 16 = 0$		$\frac{1}{2}x^2 + 2x = -5$		$-3x^2 + x = 4$	
$2x^2 - \frac{1}{2} = 0$		$3x^2 - 7x + 5 = 0$		$\frac{x^2}{4} + \frac{3}{7} = 0$	

Exercice 14 (voir réponses et correction)

Parmi les équations ci-dessous ,cocher la case lorsque l'équation est du second degré et la résoudre de la façon la plus simple possible. Résoudre ensuite les équations qui ne sont pas du second degré.

$(2x+3)(5-x)=0$		$1+x=x^2$		$3x^3+x^2=0$	
$(x^2-1)(3-2x)=0$		$3x-x^2=2$		$x+\dfrac{1}{x}=1$	

Exercice 15 (voir réponses et correction)

Factoriser lorsque c'est possible :

$2x^2-3x+1$ $\qquad$ $3x^2-5x+4$ $\qquad$ $5x^2-2x-3$

x^3-x $\qquad$ $-x^2+5x-4$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}x^2+3x-5$

Exercice 16 (voir réponses et correction)

On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x+2$

Représenter f et g sur le même graphique.

Déterminer les abscisses des points d'intersection des deux représentations graphiques.

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $f(x)=-0{,}02x^2+0{,}16x+82{,}18$

On admet que $f(x)$ modélise la population, en millions d'habitants, de l'Allemagne pour l'année 2000+x.

En utilisant ce modèle, répondre aux questions suivantes :

1°) Donner la population de l'Allemagne en 2007.

2°) En quelle année la population de l'Allemagne sera-t-elle de 80,5 millions ?

Propriété (voir démonstration 02)

On considère le trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$. Soit Δ son discriminant : $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racines. Le trinôme ne peut pas se factoriser.
  Le trinôme est toujours du signe de a .
  On peut donner son signe dans le tableau :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de ax^2+bx+c	signe de a	

- Si $\Delta=0$, le trinôme a une racine double $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
  Le trinôme peut se factoriser sous la forme $f(x)=a(x-x_0)^2$
  Le trinôme est du signe de a sauf en x_0 où il s'annule.
  On peut donner son signe dans le tableau :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta>0$, le trinôme a deux racines x_1 et x_2 qui sont égales à : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Le trinôme peut se factoriser sous la forme $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
  Le trinôme est du signe de $-a$ lorsque x est entre les racines
  et du signe de a lorsque x est à l'extérieur des racines.
  On peut donner son signe dans le tableau : (en supposant que $x_1<x_2$)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Exemple

- le trinôme $2x^2 - 8x - 10$ a pour discriminant $\Delta = 144$ et ses racines sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$
  Sachant que le coefficient de x^2 est strictement positif $(a = 2)$, son tableau de signe est :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
signe de $2x^2 - 8x - 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Remarque

L'étude du signe d'un trinôme permettra de résoudre des inéquations du second degré.
Par exemple résoudre l'inéquation $2x^2 - 8x - 10 < 0$ revient à savoir pour quelles valeurs de x le trinôme est strictement négatif et le tableau de signe permet de voir que l'ensemble des solutions est $]-1 ; 5[$.

Exercice 18 (voir réponses et correction)

1°) Faire le tableau de signes des trinômes suivants :
a) $3x^2 - 4x + 5$ b) $2x^2 - 5x + 2$ c) $-4x^2 + 4x - 1$

2°) Résoudre les inéquations suivantes :
a) $3x^2 - 4x + 5 < 0$ b) $2x^2 - 5x + 2 < 0$ c) $-4x^2 + 4x - 1 < 0$

3°) Résoudre les inéquations suivantes :
a) $3x^2 - 4x + 5 \geqslant 0$ b) $2x^2 - 5x + 2 \geqslant 0$ c) $-4x^2 + 4x - 1 \geqslant 0$

Exercice 19 (voir réponses et correction)

Résoudre les inéquations suivantes :
(On n'utilisera le discriminant que lorsque c'est nécessaire)

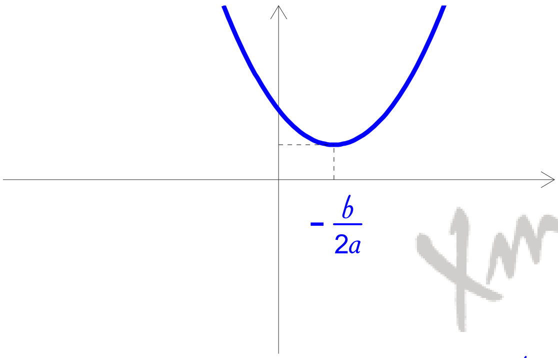
1°) $2x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$ 2°) $x^2 - 3x - 7 < 0$ 3°) $4x^2 > -3$

4°) $-x^2 < \sqrt{2}\,x - \dfrac{3}{2}$ 5°) $x - x^2 \geqslant 0$ 6°) $3x^2 + \dfrac{1}{2}x \leqslant 4$

Propriété (voir démonstration 03)

La représentation graphique d'une fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole.
Son sommet a pour abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ et pour ordonnée $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$

Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut.

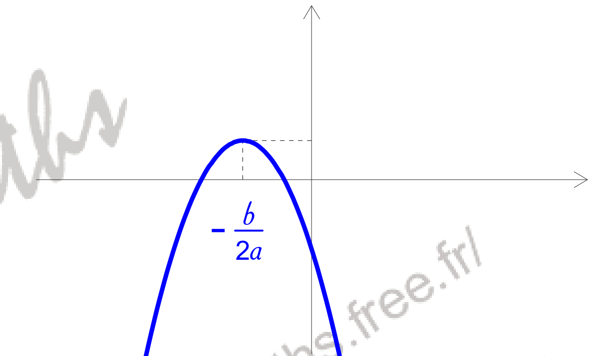


f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right]$

et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right[$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas



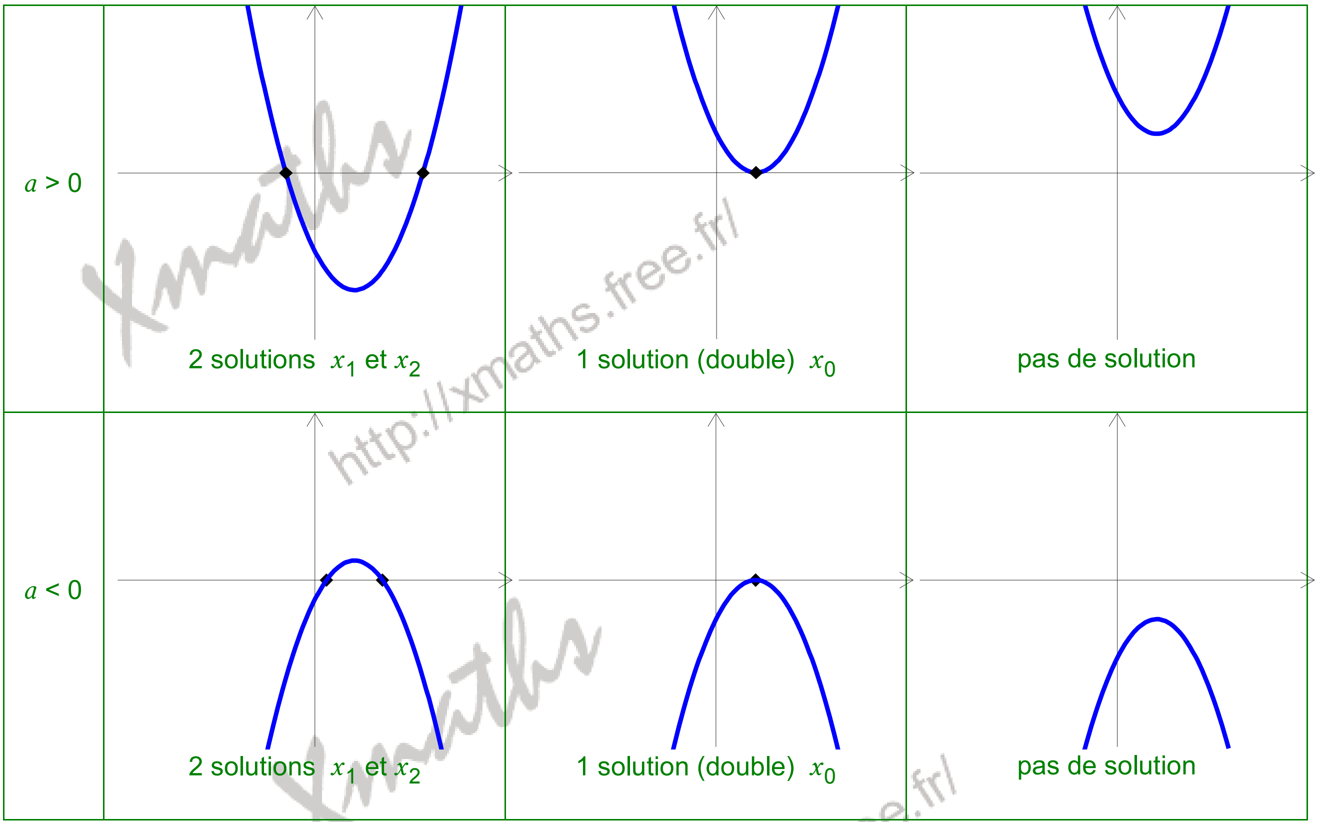
f est strictement croissante sur $\left]-\infty ; -\dfrac{b}{2a}\right]$

et strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{b}{2a} ; +\infty\right[$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

Remarque (voir animations)

Le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$ dépendent de la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.



Exercice 20 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur IR par $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$.
1°) Tracer, en la justifiant, la représentation graphique de f.
2°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et vérifier les résultats sur le graphique.

Exercice 21 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur IR par $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$.
1°) Tracer, en la justifiant, la représentation graphique de f.
2°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$, puis retrouver les résultats par le calcul.
3°) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 0$, puis retrouver les résultats par le calcul.

Exercice 22 (voir réponses et correction)

Soit f définie sur IR par $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$.
1°) Donner le sens de variation de f.
2°) Tracer, en la justifiant, la représentation graphique de f.

Exercice 23 (voir réponses et correction)

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = (2 - x)(2x^2 - 5x + 1)$.
1°) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2°) Donner suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.
3°) Déterminer, sans faire de calculs, le signe de $f(25)$ et le signe de $f(2{,}0005)$.

Exercice 24 (voir réponses et correction)

Soient f et g définies sur IR par : $f(x) = -x^2 + 4x - 5$ et $g(x) = 2 - x$.
1°) Résoudre $f(x) > 0$; $f(x) \leqslant -2$; $f(x) \leqslant g(x)$.
2°) Représenter graphiquement f et g . (on justifiera les représentations)
Retrouver graphiquement les résultats de la question précédente.

Xmaths http://xmaths.free.fr/

Exercice 25 (voir réponses et correction)

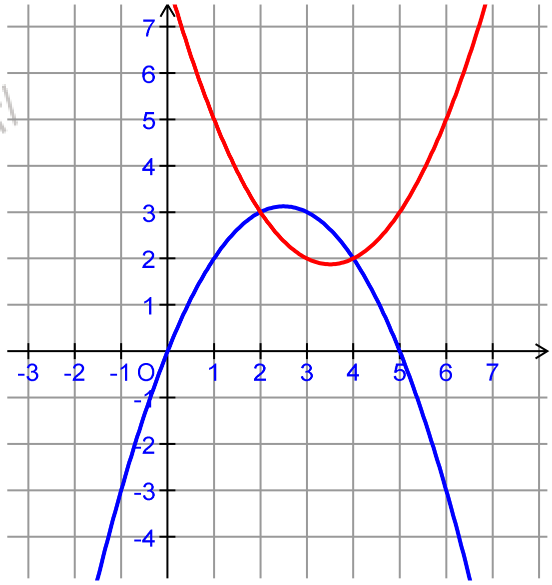
On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = (x - 2)(x^2 + 10x - 5)$ et $g(x) = -x^2 + x + 2$.

1°) En utilisant une calculatrice ou un grapheur, conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

2°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 26 (voir réponses et correction)

Sur le dessin ci-contre sont représentées deux fonctions trinômes du second degré f et g.



1°) On sait que le discriminant de f est positif et celui de g négatif.
Indiquer, en justifiant, laquelle des deux courbes représente f et laquelle représente g.

2°) f a pour racines 0 et 5 et de plus $f(1) = 2$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

3°) g a un minimum en $\frac{7}{2}$ et de plus les courbes de f et de g se coupent en A(2 ; 3) et B(4 ; 2).
Déterminer l'expression de $g(x)$.

4°) Vérifier en représentant graphiquement les fonctions f et g à partir des expressions obtenues dans le 3°) et dans le 4°).

5°) Calculer l'extrémum de f et l'extrémum de g.

Exercice 27 (voir réponses et correction)

Un bateau a une vitesse propre de 18 km.h^{-1}. Il navigue sur une rivière, descend le courant sur une distance de 24 km, puis remonte le courant sur la même distance. Il met une heure de plus pour remonter que pour descendre. Montrer que la vitesse V du courant est solution d'une équation du second degré. Résoudre cette équation.

Exercice 28 (voir réponses et correction)

1°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère deux points A et B de coordonnées respectives $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$. Rappeler l'expression de la distance AB.

2°) x et y étant deux réels, donner les formes canoniques de $x^2 - x$ et de $y^2 + 3y$.

3°) En déduire l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x ; y)$ vérifient l'équation :
$x^2 - x + y^2 + 3y - \frac{3}{2} = 0$.

Exercice 29 (voir réponses et correction)

1°) a) Créer un algorithme permettant de calculer le discriminant d'un trinôme du second degré, à partir de la donnée de ses coefficients a, b et c.
b) Vérifier son fonctionnement pour les trinômes ci-dessous :
$4x^2 - x + 3$; $2x^2 + 4x + 2$; $3x^2 - 2x - 5$

2°) a) Compléter l'algorithme pour afficher, le nombre de racines du trinôme.
b) Vérifier son fonctionnement pour les trinômes du 1°)b).

3) a) Compléter l'algorithme pour afficher, les valeurs des racines éventuelles du trinôme.
b) Vérifier son fonctionnement pour les trinômes du 1°)b).

4°) L'utilisation de l'algorithme avec le trinôme $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ est-elle satisfaisante.

Exercice 30 (voir réponses et correction)

Compléter l'algorithme précédent pour faire afficher la somme S des racines et le produit P des racines (lorsqu'il y a des racines).

Utiliser cet algorithme avec les trinômes suivants : $x^2 + 2x - 3$; $x^2 - 5x + 2$; $x^2 + 3x + 1$
$-x^2 + 3x + 5$; $-x^2 + 2x + 7$; $x^2 + 2x - 3$; $2x^2 + x - 6$; $-2x^2 - 4x + 5$; $5x^2 + 2x - 3$

Émettre une conjecture concernant l'expression de S et de P en fonction de a, b et c.

Démontrer les résultats conjecturés.

http://xmaths.free.fr