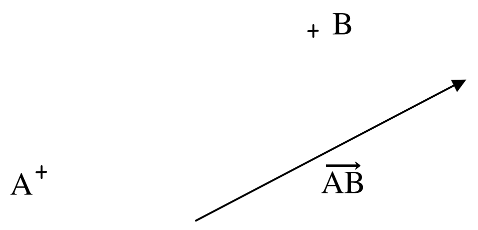
VECTEURS ET REPERES

I) RAPPELS

1) Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Un vecteur permet de caractériser un déplacement :
Il est défini par une <u>direction</u>, un <u>sens</u> sur cette direction et une <u>longueur</u>.

⚠ Il n'est en aucun cas lié à un point de départ ou d'arrivée !



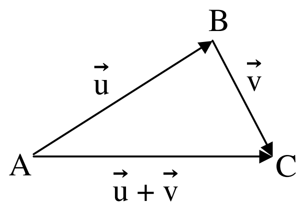
(ça "donne" un parallélogramme !)

Vocabulaire : Au lieu de parler de la longueur d'un vecteur, on préfère parler de sa norme.
La norme de $\vec{u}$ se note $\|\vec{u}\|$

2) Somme de vecteurs

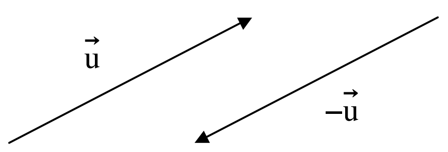
Un vecteur étant compris comme un déplacement :

• La somme de deux vecteurs est comprise comme la succession de deux déplacements



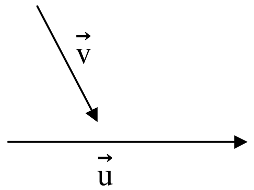
Aller de A vers B puis de B vers C, "revient" à aller de A vers C

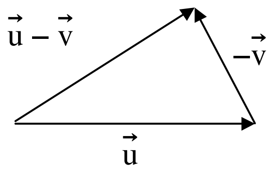
• L'opposé d'un vecteur est le déplacement en sens inverse (même direction et même norme)



$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

• La différence de deux vecteurs est la somme du premier avec l'opposé du second



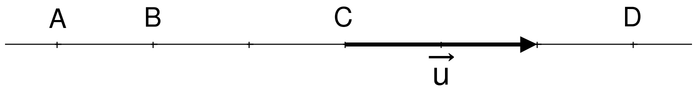


$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

p259 : 12, 13
p263 : 29, 30, 31

II) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN REEL

1) Intuitivement



$\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} =$
$\overrightarrow{AC} =$
$\overrightarrow{BA} =$

2) Définition

Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\,\vec{u}$ tel que :

- si $k > 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$
  $k\,\vec{u}$ a la même direction et le même sens que $\vec{u}$ et pour norme $k \|\vec{u}\|$

- si $k < 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$
  $k\,\vec{u}$ a ……..

- si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
  $k\,\vec{u} =$ ……..

3) Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k', on a :

$k\,(\vec{u} + \vec{v}) =$
$(k + k')\,\vec{u} =$
$k\,(k'\,\vec{u}) =$
$k\,\vec{u} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad$ ou

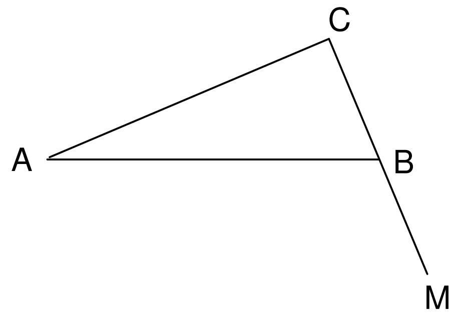
4) Remarques

- Les mathématiciens n'ont jamais défini de division d'un vecteur par un réel !
  L'écriture $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$ est interdite !! On écrit $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$

- Les mathématiciens n'ont jamais défini de division de vecteurs !
  L'écriture $3 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$ est interdite !! On écrit $\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{CD}$

p259 : 16, 19
p263 : 32, 34, 35, 37
p265 : 52

III) DANS LES EXERCICES



1) Construire un point

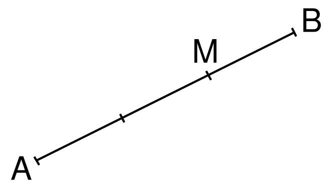
Ex1 : Soit un triangle ABC. Construire M tel que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

donc M est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$

Ex2 : Soient deux points A et B. Existe-t-il un ou des points M tels que $2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$?

$$\begin{aligned} 2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow 2\,\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{AB} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



donc M existe et est unique : Il est l'image de A par la translation de vecteur $\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$

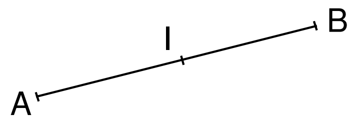
p264 : <u>49</u>, <u>50</u>

2) Traduire l'énoncé en égalités vectorielles

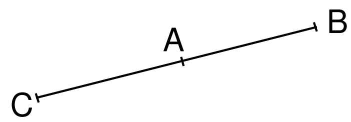
- I est le milieu de [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



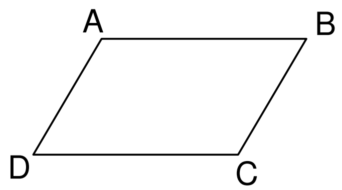
- C est le symétrique de B par rapport à A $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$



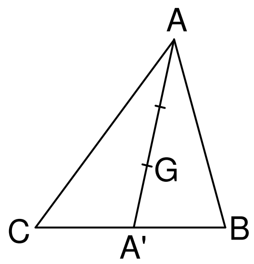
- ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

($\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$)



- G est le centre de gravité du triangle ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ (A' étant le milieu de [BC])

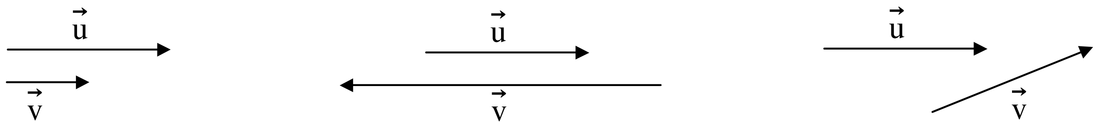


p263 : 33, 38
p264 : 40, 41, 44, 46

IV) COLINEARITE

1) Intuitivement

Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ dans les cas suivants :



$\vec{u}$ = …..$\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u}$ = …..$\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u}$ = …..$\vec{v}$

Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction, il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

2) Définition

On dit que $\vec{u}$ est <u>colinéaire</u> à $\vec{v}$ lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$
$\vec{u}$ a alors la même direction que $\vec{v}$

Remarques :
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$ car quelque soit $\vec{v}$, on a : $\vec{0} = 0 \times \vec{v}$
  en revanche, aucun vecteur non nul n'est colinéaire au vecteur nul : $\vec{u} = ? \times \vec{0}$
- Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>non nuls</u> et où $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$:
  Le réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$ est alors non-nul, on peut donc écrire $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc aussi colinéaire à $\vec{u}$.
  On dit alors que "$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires" (l'un à l'autre)

3) Dans les exercices

A, B, C et D étant distincts, on a :
- (AB) // (CD) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

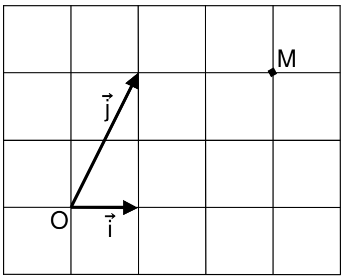
p265 : 56, <u>55</u>, **54**, 57, 58

V) BASES ET REPERES DU PLAN

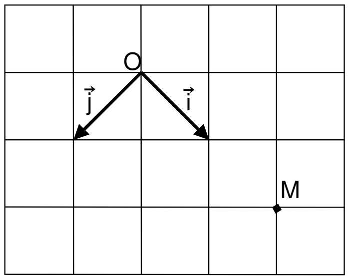
1) Intuitivement

Dans chacune des situations ci-dessous, et quand cela est possible, exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction des vecteurs de la figure.

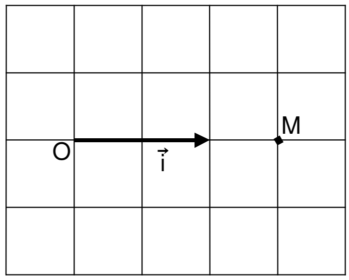
a) $\overrightarrow{OM} =$



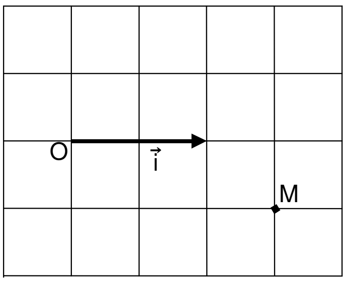
b) $\overrightarrow{OM} =$



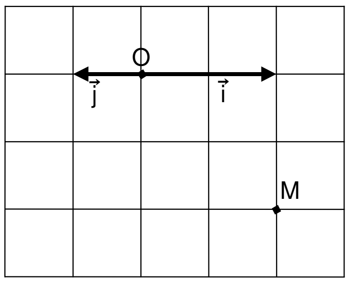
c) $\overrightarrow{OM} =$



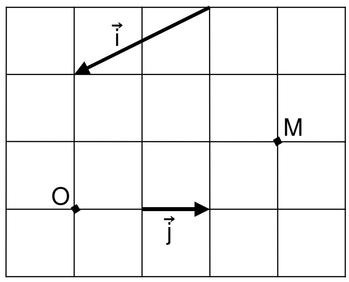
d) $\overrightarrow{OM} =$



e) $\overrightarrow{OM} =$



f) $\overrightarrow{OM} =$



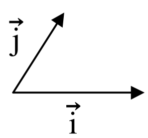
Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :

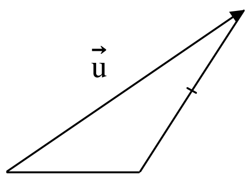
- En fonction d'un seul vecteur, on peut exprimer seulement ……..
- En fonction de deux vecteurs colinéaires, on peut exprimer seulement ……..
- En fonction de deux vecteurs non colinéaires, on peut exprimer ……..

2) Bases du plan

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur du plan, il faut choisir au préalable un couple de vecteurs non colinéaires appelé <u>base du plan</u> . On peut alors décomposer tous les autres vecteurs du plan en fonction de ces deux vecteurs et cette décomposition est unique.

Ex :





$\vec{u} = \dots\ \vec{i} + \dots\ \vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}\,(\dots\ ;\dots)$

Plus généralement on a dans une base $(\vec{i};\vec{j})$:

$$\boxed{\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}\,(x\,;\,y)}$$

Remarque : Les deux vecteurs d'une base étant non-colinéaires l'un à l'autre : ils sont non-nuls !

3) Repères du plan

Pour pouvoir déterminer les coordonnées de n'importe quel point du plan, il ne suffit pas d'avoir une base, il faut aussi choisir un point fixe appelé <u>origine</u>. Cette base et cette origine forment un <u>repère du plan</u>.
Les coordonnées d'un point M dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ sont alors définies comme étant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

$$\underset{\text{repère } (O;\vec{i};\vec{j})}{M\,(x\,;\,y)} \Leftrightarrow \underset{\text{base } (\vec{i};\vec{j})}{\overrightarrow{OM}\,(x\,;\,y)} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

Déterminer les coordonnées des points du 1)

4) Propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, k un réel, A et B deux points et $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère :

- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{\vec{u}} = \dots \\ y_{\vec{u}} = \dots \end{cases}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées (………;………)
- $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées (………;………)

dans la base $(\vec{i};\vec{j})$

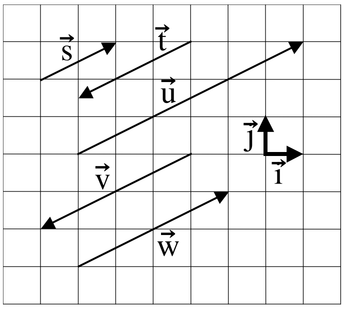
- $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (………;………)
- I le milieu de [AB] a pour coordonnées (………;………)

dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

p259 : 20
p266 : 63, 66, 69, 70

VI) CRITERE DE COLINEARITE

1) Intuitivement



Compléter le tableau ci-dessous :

	$\vec{s}$	$\vec{t}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{w}$
abscisse					
ordonnée					

Les vecteurs ci-contre sont colinéaires. Que remarque-t-on concernant leurs coordonnées ?

2) Critère de colinéarité

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors :

$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$

$\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\begin{cases} x_{\vec{u}} = k\,x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = k\,y_{\vec{v}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité

$x_{\vec{u}}$	$x_{\vec{v}}$
$y_{\vec{u}}$	$y_{\vec{v}}$

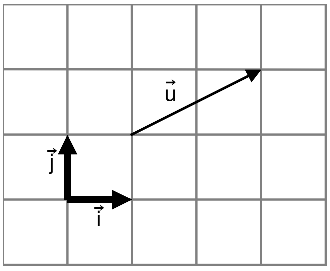
Pour exprimer que les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles, nous retiendrons le critère suivant :

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors :
$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $x_{\vec{u}}\,y_{\vec{v}} - x_{\vec{v}}\,y_{\vec{u}} = 0$

p259 : 21
p267 : 75, 78, 79, 81
p268 : 87

VII) NORME D'UN VECTEUR ET DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

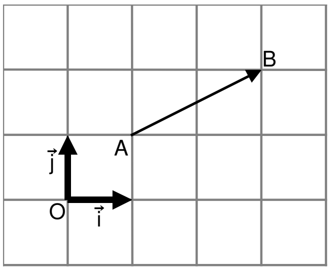
Dans une base <u>orthonormale</u> $(\vec{i};\vec{j})$:



Quelle est la norme de $\vec{u}$ (2 ; 1) ?
$\vec{u} = 2\,\vec{i} + 1\,\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \| \vec{u} \| =$

Plus généralement : $\boxed{\vec{u}\,(x\,;\,y) \quad \Rightarrow \quad \| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

De même, dans un repère <u>orthonormal</u> $(O;\vec{i};\vec{j})$:



$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$

On a donc : $\boxed{\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

p266 : 65
p267 : 83
p268 : <u>86</u>