Définition de la fonction exponentielle népérienne : $f(x) = exp\ (x)$

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = exp\ (0) = 1$ et $f'(x) = (exp)'(x) = exp\ (x)$ pour tout x réel.

La fonction exponentielle népérienne a pour dérivée sa propre valeur, en tout point.

Première conséquence : $[exp\ (u)]' = u' \times exp\ (u)$.

En effet : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' \Rightarrow (v \circ u)' = v'[u(x)] \times u'(x)$

Donc : $[exp\ (u)]'(x) = u'(x).exp\ [u(x)]$.

<u>*Conséquences Algébriques :*</u>

pour tout a, b réels : $exp\ (a + b) = [exp\ (a)][exp\ (b)]$

Preuve :

Soit $g(x) = exp\ (x + b)$ avec b réel constant. On pose $u(x) = x + b$, d'où $u'(x) = 1$.

On a vu : $[exp\ (u)]'(x) = u'(x)\ exp\ [u(x)]$, d'où $g'(x) = 1.exp\ (x + b) = g(x)$.

Conséquence : Pour tout x réel, $\dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{exp'(x)}{exp\ (x)} = 1$.

Or, $\dfrac{u'}{u} = \dfrac{v'}{v} \Rightarrow u'v - v'u = 0 \Rightarrow \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = 0 \Rightarrow (\dfrac{u}{v})' = 0 \Rightarrow \dfrac{u}{v} = k \Rightarrow u(x) = k.v(x)$.

On en déduit : $exp\ (x + b) = k.exp\ (x)$ pour tout x réel. On déduit $exp\ (0 + b) = k.exp\ (0) \Rightarrow k = exp\ (b)$.

Conclusion : $exp\ (x + b) = k.exp\ (x) = exp\ (b).exp\ (x)$, soit la formule recherchée.

A partir de cette formule, nombre d'autres sont déductibles :

$1 = exp\ (0) = exp\ [a + (-a)] = exp\ (a).exp\ (-a) \Rightarrow exp\ (-a) = \dfrac{1}{exp\ (a)}$.

pour tout a réel : $exp\ (-a) = \dfrac{1}{exp\ (a)}$

$exp\ (a - b) = exp\ [a + (-b)] = exp\ (a).exp\ (-b) = \dfrac{exp\ (a)}{exp\ (b)}$.

pour tout a, b réels : $exp\ (a - b) = \dfrac{exp\ (a)}{exp\ (b)}$

Pour n entier naturel : $exp\ (na) = exp\ (a + a + ... + a) = exp\ (a).exp\ (a). ... exp\ (a) = [exp\ (a)]^n$.

pour tout entier naturel n et tout a réel : $exp\ (na) = [exp\ (a)]^n$

Posons $exp\ (1) = e$, nombre dont on précisera la valeur plus bas.

Pour tout **entier naturel** n : $exp\ (n) = exp\ (1 + 1 + ... + 1) = exp\ (1).exp\ (1). ... . exp\ (1) = e.e. ... e = e^n$.

La similitude avec les puissances est frappante :

$$e^0 = 1 \;;\; e^1 = e \;;\; e^{m+n} = e^m \,.\, e^n \;;\; e^{-m} = \frac{1}{e^m} \;;\; e^{m-n} = \frac{e^m}{e^n} \;;\; e^{mn} = (e^m)^n$$

Frontière entre les notations « puissance » et « exponentielle »

Pour tout nombre fractionnaire, la notion de « puissance » existe, et par extension, l'exponentielle peut être confondue avec une puissance du nombre e :

$exp\ (3) = e^3$ puissance 3 de e, et exponentielle de 3.

$exp\ (-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$ puissance -2 de e, et exponentielle de -2.

$exp\ (-1/2) = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ puissance $-\frac{1}{2}$ de e, et exponentielle de $-\frac{1}{2}$.

Par contre une puissance irrationnelle, comme $5^{\sqrt{2}}$, ne veut rien dire en terme de puissance, alors que l'exponentielle existe pour tout nombre réel.

Donc, $exp\ (\sqrt{2})$ a un sens, et par *abus de langage* sera noté comme une puissance, $e^{\sqrt{5}}$, bien qu'il ne s'agisse pas d'une puissance au sens classique du mot.

A l'avenir, pour tout x réel on écrira $exp\ (x) = e^x$, mais ce n'est une puissance que si x est rationnel

Résumé des formules :

pour tout a, b réels : $e^0 = 1$ $e^1 = e$ $e^a \times e^b = e^{a+b}$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^b = e^{a \times b}$
Dérivées : $(e^x)' = e^x$ $(e^u)' = \boldsymbol{u'}.e^u$

Sens de Variation :

Si $h > 0$, $exp'(0) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \Leftrightarrow e^h - 1 \approx h \Leftrightarrow e^h \approx 1 + h > 1$.

Conséquence : Si $h > 0$, $e^{x+h} = e^x \,.\, e^h > e^x$, ce qui prouve que $a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$.

La fonction *exponentielle népérienne* est *strictement croissante* : $a > b \Leftrightarrow e^a > e^b$

Injectivité :

C'est une conséquence de la croissance stricte et de la continuité de la fonction exponentielle. Celle-ci est continue car dérivable par définition.

La fonction *exponentielle népérienne* est *injective* : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

Comportement aux infinis :

Soit $a > 0$, ce qui implique $e^a > e^0 \Leftrightarrow e^h > 1$. Posons $e^a = A > 1$.

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{na} = \lim\limits_{n \to +\infty} (e^a)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} A^n = +\infty$, suivant les propriétés des suites géométriques de raison $q > 1$.

En posant $x = na$ qui tend vers $+\infty$ avec n , on peut conclure $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{na} = +\infty$.

Soit maintenant $x \to -\infty$: Posons $X = -x$, soit $X \to +\infty$.

On obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \dfrac{1}{\lim\limits_{X \to +\infty} e^X} = 0^+$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Conséquence :

exp (x) , fonction continue, prend des valeurs qui varient de 0^+ à $+\infty$, lorsque x croit de $-\infty$ à $+\infty$.

Ses valeurs sont donc toujours strictement positives.

Pour tout x réel : $e^x > 0$

Pour préciser : $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$, $e^0 = 1$, $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$.

Direction asymptotique pour $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} exp'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$, ce qui prouve que la pente au graphe devient infinie lorsque $x \to +\infty$.

On déduit que le graphe de l'*exponentielle népérienne* admet une *branche parabolique* sur $y'y$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Bijection de la fonction exponentielle népérienne :

exp (x) , continue et strictement croissante établit une *bijection* de $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$

En conséquence, tout nombre $y > 0$ est l'*exponentielle népérienne* d'un nombre réel unique x .

On a vu que $x < 0$ si $0 < y < 1$ et $x > 0$ si $y > 1$.

Définition du nombre e :

On a posé $exp(1) = e^1 = e$, donc *le nombre e est l'image de $x = 1$* par $exp(x)$.

Il est bon de savoir que $\boldsymbol{e \approx 2{,}718...}$ (nombre irrationnel)

Précisions sur les tangentes au graphe de $exp(x) = e^x$:

On sait que l'équation de la tangente à G_f en $x = a$ est : $T_a \mid y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Tangente en $x = 0$: $T_0 \mid y = exp'(0)(x - 0) + exp(0)$, soit $T_0 \mid y = x + 1$.

La tangente en $x = 0$ est parallèle à la première bissectrice des axes.

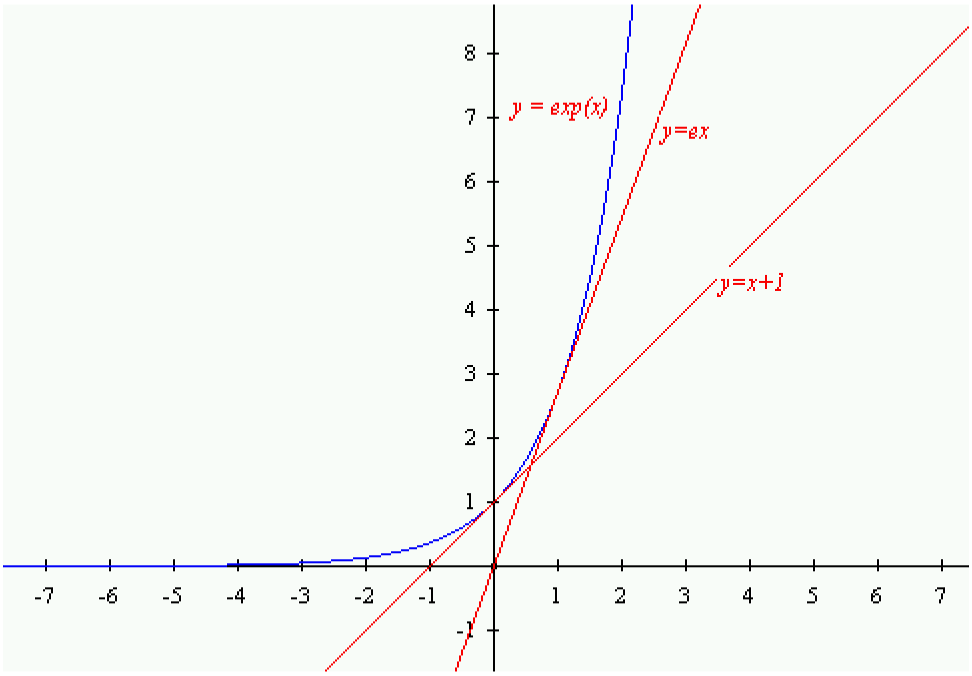
Tangente en $x = 1$: $T_1 \mid y = exp'(1)(x - 1) + exp(1)$, soit $T_1 \mid y = e(x - 1) + e \Leftrightarrow T_1 \mid y = e.x$.

La tangente en $x = 1$ passe par l'origine du graphe.

Tableau de Variation :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	1	$+$	e	$+$	
$exp(x)$	0^+	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe :



Cas d'indétermination entre e^x et les puissances de x lorsque x tend vers les infinis :

Si $x \to +\infty$, on a vu que $exp(x) \to +\infty$, ce qui crée une indétermination de type $\frac{\infty}{\infty}$ pour $\frac{exp(x)}{x}$.

On a également vu que si $x \to +\infty$, le graphe admet une branche parabolique sur l'axe $y'y$, ce qui signifie que la pente de la droite (OM) devient infinie lorsque l'abscisse x du point M , sur le graphe , devient elle-même infinie , soit :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

La croissance de e^x est infiniment plus forte que celle de x lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Si $x \to -\infty$, on a vu que $exp(x) \to 0^+$, ce qui crée une indétermination de type $0 \times \infty$ pour $x.exp(x)$:

Soit $X = -x$, d'où $X \to +\infty$: On déduit $\lim\limits_{x \to -\infty} x.exp(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} (-X).e^{-X} = -\frac{1}{\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X}} = 0^-$, puisque $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.

La décroissance de e^x vers 0 est infiniment plus forte que la croissance de x vers $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0^-$

Ces formules peuvent être généralisées aux puissances positives de x :

$$\text{Si } \alpha > 0 : \quad \lim_{x \to -\infty} x^{\alpha}.\, e^{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$$

Cas d'indétermination entre e^x *et* x *en* $x = 0$: $\dfrac{e^x - 1}{x}$ est indéterminé de type $\dfrac{0}{0}$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = exp'(0) = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Primitives et Intégrales d'exponentielles népériennes :

Etant sa propre dérivée, l'exponentielle népérienne est également sa propre primitive :

$$\int e^x\, dx = e^x + \mathrm{C}^{te} \quad ; \quad \int u'\, e^u\, dx = e^u + \mathrm{C}^{te} \quad ; \quad \int_a^b e^x\, dx = e^b - e^a$$