Définition de la fonction logarithme népérien : $f(x) = ln(x)$

f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(1) = ln(1) = 0$ et $f'(x) = (ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout x réel strictement positif.

La fonction logarithme népérien a donc une dérivée strictement positive, en tout point.

Première conséquence : $[ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$.

En effet : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u' \Rightarrow (v \circ u)' = v'[u(x)] \times u'(x)$

Donc : $[ln(u)]'(x) = u'(x) . \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

<u>*Conséquences Algébriques :*</u>

pour tout $a, b > 0$: $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$

Preuve :

Soit $g(x) = ln(x \times b)$ avec b réel constant. On pose $u(x) = x \times b$, d'où $u'(x) = b$.

On a vu : $[ln(u)]'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, donc $g'(x) = \dfrac{b}{x \times b} = \dfrac{1}{x} = ln'(x)$.

Conséquence : Pour tout $x > 0$, $g'(x) - ln'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) - ln(x) = k \Leftrightarrow g(x) = ln(x) + k$.

(Deux fonctions ayant même dérivée sont identiques à une constante près)

On déduit : $ln(x \times b) = ln(x) + k$ pour tout $x > 0$. D'où $ln(1 \times b) = ln(1) + k \Rightarrow k = ln(b)$.

Conclusion : $ln(x \times b) = ln(x) + k = ln(x) + ln(b)$, soit la formule recherchée.

A partir de cette formule, nombre d'autres sont déductibles :

$0 = ln(1) = ln[a \times (\dfrac{1}{a})] = ln(a) + ln(\dfrac{1}{a}) \Rightarrow ln(\dfrac{1}{a}) = -ln(a)$.

pour tout $a > 0$: $ln(\dfrac{1}{a}) = -ln(a)$

$ln(\dfrac{a}{b}) = ln[a \times (\dfrac{1}{b})] = ln(a) + ln(\dfrac{1}{b}) = ln(a) - ln(b)$.

pour tout $a, b > 0$: $ln(\dfrac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$

Pour n entier naturel : $ln(a^n) = ln(a \times a \times ... \times a) = ln(a) + ln(a) + ... + ln(a) = n\, ln(a)$.

pour tout entier naturel n et tout $a > 0$: $ln(a^n) = n\, ln(a)$

Résumé des formules :

pour tout a , $b > 0$ et pour tout n entier naturel

$$ln\,(1) = 0 \quad ; \quad ln\,(a \times b) = ln\,(a) + ln\,(b) \quad ; \quad ln\,(\frac{1}{a}) = -ln\,(a) \quad ; \quad ln\,(\frac{a}{b}) = ln\,(a) - ln\,(b) \quad ; \quad ln\,(a^n) = n\,ln\,(a)$$

Dérivées : $ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad [ln\,(u)]' = \frac{u'}{u}$

Sens de Variation :

On a vu que $ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, d'où la *croissance stricte* de la fonction $ln\,(x)$.

La fonction *logarithme népérien* est *strictement croissante* : $ln\,(a) > ln\,(b) \Leftrightarrow a > b$

Injectivité :

C'est une conséquence de la croissance stricte et de la continuité de la fonction logarithme. Celle-ci est continue car dérivable par définition.

La fonction *logarithme népérien* est *injective* : $ln\,(a) = ln\,(b) \Leftrightarrow a = b$

Comportement aux bornes du domaine :

Soit $a > 1$, ce qui implique $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$, suivant les propriétés des suites géométriques de raison $q > 1$.

$a > 1 \Leftrightarrow ln\,(a) > 0$ puisque $ln(x)$ est une fonction croissante.

En posant $x = a^n$ qui tend vers $+\infty$ avec n , on peut conclure $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} ln\,(a^n) = \lim\limits_{n \to +\infty} [n\ \ln\,(a)]$.

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(x) = [\lim\limits_{n \to +\infty} n\,]\,(\ln a) = +\infty$.

Soit maintenant $x \to 0^+$: Posons $X = \frac{1}{x}$, soit $X \to +\infty$.

On obtient : $\lim\limits_{x \to 0^+} ln\,(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} ln\,(\frac{1}{X}) = -\lim\limits_{X \to +\infty} ln\,(X) = -\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} ln\,(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} ln\,(x) = +\infty$$

Conséquence :

$ln\,(x)$, fonction continue, prend des valeurs qui varient de $-\infty$ à $+\infty$, lorsque x croit de 0^+ à $+\infty$.

Ses valeurs prennent donc toutes les valeurs réelles.

Pour préciser : $0 < x < 1 \Leftrightarrow ln\,(x) < 0$, $ln\,(1) = 0$, $x > 1 \Leftrightarrow ln\,(x) > 0$.

Direction asymptotique pour $x \to +\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, ce qui prouve que la pente au graphe devient nulle lorsque $x \to +\infty$.

On déduit que le graphe du *logarithme népérien* admet une *branche parabolique* sur $x'x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Bijection de la fonction logarithme népérien :

$ln(x)$, continue et strictement croissante établit une *bijection* de $\mathbb{R}_+^* =]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$

En conséquence, tout nombre réel y est le *logarithme népérien* d'un nombre réel unique $x > 0$.

On a vu que $0 < x < 1$ si $y < 0$ et $x > 1$ si $y > 0$.

Définition du nombre e :

La remarque précédente prouve qu'il existe un nombre $x > 0$ unique tel que $ln(x) = 1$.

On appelle ce nombre e , seul nombre à vérifier $ln(e) = 1$.

Il est bon de savoir que **$e \approx 2{,}718...$** (nombre irrationnel)

Précisions sur les tangentes au graphe de ln (x) :

On sait que l'équation de la tangente à G_f en $x = a$ est : $T_a \mid y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Tangente en $x = 1$: $T_1 \mid y = ln'(1)(x-1) + ln(1)$, soit $T_1 \mid y = x - 1$.

La tangente en $x = 1$ est parallèle à la première bissectrice des axes.

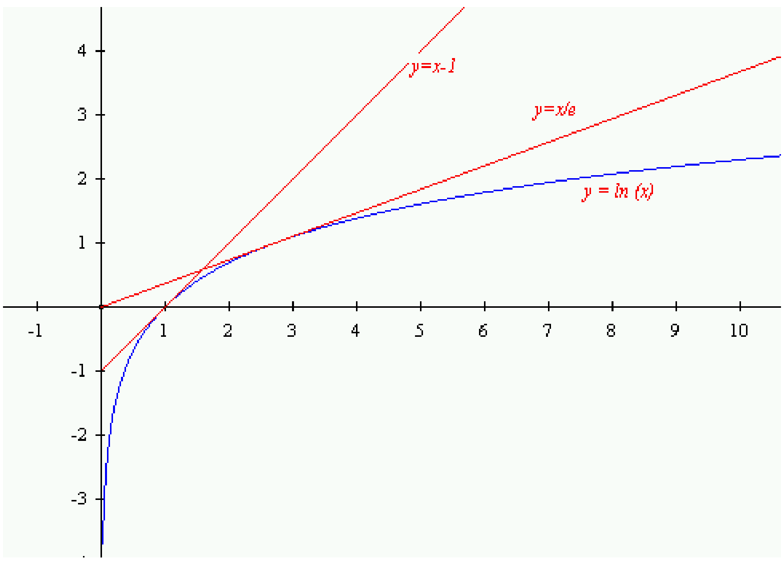
Tangente en $x = e$: $T_e \mid y = ln'(e)(x-e) + ln(e)$, soit $T_e \mid y = \frac{1}{e}(x-e) - 1 \Leftrightarrow T_e \mid y = \frac{1}{e}x$.

La tangente en $x = e$ passe par l'origine du graphe.

Tableau de Variation :

x	0		1		e		$+\infty$
$ln'(x)$		+	1	+	$\frac{1}{e}$	+	
$ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Graphe :



Cas d'indétermination entre $ln\ (x)$ et les puissances de x lorsque x tend vers les bornes du domaine :

Si $x \to +\infty$, on a vu que $ln\ (x) \to +\infty$, ce qui crée une indétermination de type $\frac{\infty}{\infty}$ pour $\frac{ln\ (x)}{x}$.

On a également vu que si $x \to +\infty$, le graphe admet une branche parabolique sur l'axe $x'x$, ce qui signifie que la pente de la droite (OM) devient nulle lorsque l'abscisse x du point M , sur le graphe , devient infinie , soit:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f\ (x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\ (x)}{x} = 0^+.$$

La croissance de $ln\ (x)$ est infiniment plus lente que celle de x lorsque x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\ (x)}{x} = 0^+$

Si $x \to 0^+$, on a vu que $ln\ (x) \to -\infty$, ce qui crée une indétermination de type $0 \times \infty$ pour $x.ln\ (x)$:

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\ (x)}{x} = 0^+$, on pose $X = \frac{1}{x}$, d'où $X \to +\infty$, dont on déduit :

$$\lim_{x \to 0^+} x.ln\ (x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X}.ln\ (\frac{1}{X}) = -\lim_{X \to +\infty} \frac{ln\ X}{X} = 0^- .$$

La décroissance de $ln\ (x)$ vers $-\infty$ est infiniment plus lente que celle de x vers 0^+ : $\lim\limits_{x \to 0^+} x.ln\ (x) = 0^-$

Ces formules peuvent être généralisées aux puissances positives de x :

Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha}.\ ln\ x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\ x}{x^{\alpha}} = 0$

Cas d'indétermination entre $ln\ x$ et x en $x = 1$: $\frac{\ln x}{x - 1}$ est indéterminé de type $\frac{0}{0}$ en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1 .$$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Primitives et Intégrales de logarithmes népériens :

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln \lvert x \rvert + C^{te}$; $\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln \lvert u \rvert + C^{te}$; $\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = [\ \ln \lvert x \rvert\ ]_a^b = \ln \lvert b \rvert - \ln \lvert a \rvert$

On remarquera la présence des valeurs absolues dans les primitives :

En effet $ln \mid u \mid$ a également pour dérivée $\frac{u'}{u}$ et constitue un cas plus général que $ln\ u$.

Preuve :

Si $u > 0$, alors $(\ ln \mid u \mid)' = (\ ln\ u\ )' = \frac{u'}{u}$.

Si $u < 0$, alors $(\ ln \mid u \mid)' = [\ ln\ (-u)\ ]' = \frac{-u'}{-u} = \frac{u'}{u}$ également.