

Somme et Produit des Racines :

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré ($a \neq 0$).

On supposera que l'équation admet des racines $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$.

Somme des Racines : $S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

Produit des Racines : $P = x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(b - \sqrt{\Delta})(b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Les racines d'une équation du second degré, lorsqu'elles existent,

Ont pour Somme $S = -\frac{b}{a}$ et pour Produit $P = \frac{c}{a}$

Ainsi : $2x^2 - 9x + 10 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1 \Rightarrow$ Deux racines distinctes $\begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 + 1}{4} = \frac{5}{2} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - 1}{4} = 2 \end{cases}$.

La somme des racines est $\alpha + \beta = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2} = -\frac{b}{a}$, et leur produit $\alpha\beta = \frac{5}{2} \times 2 = 5 = \frac{c}{a}$.

Inversement : Résolution rapide d'une équation du second degré.

En regardant les valeurs de a, b, c , si on trouve deux nombres α et β de somme $-\frac{b}{a}$ et de produit $\frac{c}{a}$,

il s'agit des deux racines de l'équation.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $x^2 + 5x - 14 = 0$.

$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -5$ et $P = \frac{c}{a} = -14 \Rightarrow \alpha = -7$ et $\beta = +2$ (ou inversement).

Lorsqu'on trouve les racines par cette méthode, ce sont les seules racines possibles, on peut être sûr du résultat..

Réciproquement :

Deux nombres de somme S et de produit P sont les racines de l'équation : $X^2 - SX + P = 0$.

$\begin{cases} S = x' + x'' \\ P = x'x'' \end{cases} \Rightarrow x'$ et x'' racines de $X^2 - SX + P = 0$

Preuve : Soit $\alpha + \beta = S$ et $\alpha\beta = P$, S et P connus.

$\beta = S - \alpha \Rightarrow \alpha\beta = \alpha(S - \alpha)$, soit $\alpha^2 - S\alpha + P = 0$.

Les rôles de α et β étant symétriques, on aurait également obtenu $\beta^2 - S\beta + P = 0$.

Les nombres α et β sont les racines de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple : Déterminer a et b réels, sachant $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = -10 \end{cases}$.

$$\begin{cases} S = a + b = 3 \\ P = ab = -10 \end{cases} \Rightarrow a, b \text{ racines de } X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X - 10 = 0.$$

$$\Delta = 49 \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 7}{2} = +5 \\ X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 7}{2} = -2 \end{cases}.$$

a, b ayant des rôles symétriques, il existe deux couples solutions : $(a; b) = (5; -2)$ et $(a; b) = (-2; 5)$.

Expression algébrique de deux variables, symétrique par rapport à celles-ci :

Toute expression dans laquelle deux variables a et b sont permutable (rôles symétriques) peuvent s'écrire exclusivement avec $S = a + b$ et $P = ab$.

Exemple 1 : $E = \frac{a+b}{a^2+b^2}$.

L'expression est bien symétrique par rapport à a et b : $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{b+a}{b^2+a^2}$.

$$S = a + b \Rightarrow S^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ soit } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = S^2 - 2P.$$

$$E = \frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{S}{S^2-2P}.$$

Exemple 2 : Soient α et β les racines de l'équation $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

Sans calculer ces racines, trouver la valeur de l'expression $E = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$.

On constate que $a = +2$ et $c = -7$ sont de signes contraires, ce qui assure $\Delta \geq 0$, donc l'existence des racines.

$$E = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \text{ est symétrique par rapport à } \alpha \text{ et } \beta, \text{ puisque } E = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}.$$

E peut donc s'écrire avec l'aide exclusive de $S = \alpha + \beta$ et $P = \alpha\beta$.

$$E = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P}.$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2} \text{ et } P = \frac{c}{a} = -\frac{7}{2} \Rightarrow E = \frac{\frac{25}{4} + 7}{-\frac{7}{2}} = -\frac{\frac{53}{4}}{\frac{7}{2}} = -\frac{53}{4} \times \frac{2}{7}, \text{ soit } E = -\frac{53}{14}.$$

Exploitation de Δ, P, S pour déterminer le nombre et le signe des racines d'une équation du 2^{ème} degré :

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$ pas de racine.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 2 racines confondues (racine double) $\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2 \text{ racines distinctes } \begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}.$$

- Dans ce dernier cas :
- $P > 0 \Leftrightarrow \alpha$ et β de même signe $\Leftrightarrow \alpha < \beta < 0$ ou $0 < \alpha < \beta$
 - $S > 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \beta$
 - $S < 0 \Leftrightarrow \alpha < \beta < 0$.
- $P < 0 \Leftrightarrow \alpha$ et β de signes opposés $\Leftrightarrow \alpha < 0 < \beta$
 - $S < 0 \Leftrightarrow |\alpha| > \beta$ (α plus négatif que β n'est positif)
 - $S > 0 \Leftrightarrow |\alpha| < \beta$ (α moins négatif que β n'est positif)