Valeur Absolue : Définition

La valeur absolue d'un nombre rend ce nombre positif ou nul : $|+5| = +5$ et $|-3| = +3$.

$|a|$ est lu « valeur absolue de a » .

Pour rendre positif un nombre négatif, il suffit d'en changer le signe, en le multipliant par -1 :

$|-4| = -(-4) = +5$.

Si le nombre est positif ou nul, on ne le touche pas.

Valeur Absolue : Définition $\begin{cases} \boldsymbol{a \geq 0 \iff |a| = a} \\ \boldsymbol{a < 0 \iff |a| = -a} \text{, pour le rendre positif.} \end{cases}$

***Ecart algébrique – Ecart arithmétique entre deux nombres* :**

Soit a , b deux nombres réels :

On appelle ***<u>Ecart algébrique</u>*** (avec un signe) *<u>de</u>* a *<u>vers</u>* b , l'expression $\boldsymbol{b - a}$.

Ainsi : $a = -3$ et $b = +2$, $b - a = (+2) - (-3) = +5$,

ce qui signifie que b est *supérieur* à a de 5 unités (Ecart algébrique $b - a > 0$).

De même : $a = -2$ et $b = -5$, $b - a = (-5) - (-2) = -5 + 3 = -3$,

ce qui signifie que b est *inférieur* à a de 3 unités (Ecart algébrique $b - a > 0$).

On appelle ***<u>Ecart arithmétique</u>*** (non signe) *<u>entre</u>* a *<u>et</u>* b , l'expression $\boldsymbol{|b - a|}$. (lire « valeur absolue de $b - a$ »)

Ainsi : $a = -3$ et $b = +2$, $|b - a| = |(+2) - (-3)| = |+5| = +5.$,

ce qui signifie que b est *écarté* de a de 5 unités (sans préciser le sens).

De même : $a = -2$ et $b = -5$, $|b - a| = |(-5) - (-2)| = |-5 + 3| = |-3| = +3$,

ce qui signifie que b est *écarté* de a de 3 unités (sans préciser le sens).

La notion d'écart arithmétique est moins précise que celle d'écart algébrique, puisqu'elle n'indique pas de quel côté se calcule l'écart menant de a à b , à gauche ou à droite de a .

Ecart Arithmétique (non signé) – Distance entre a et b .

$\boldsymbol{E = |b - a|}$ **mesure l'écart arithmétique de a vers b .**

$$\boldsymbol{|b - a| = k \geq 0 \iff \begin{cases} b - a = k \iff b = a + k \\ b - a = -k \iff b = a - k \end{cases}}.$$

Ainsi : $|x - 4| = 5 \iff \begin{cases} x - 4 = -5 \iff x = -1 \\ x - 4 = +5 \iff x = +9 \end{cases}$.

On peut s'habituer à dire : $|x - 4| = 5 \iff \begin{cases} x = +4 - 5 = -1 \\ x = +4 + 5 = +9 \end{cases}$.

Exemple 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x + 3| = 8$.

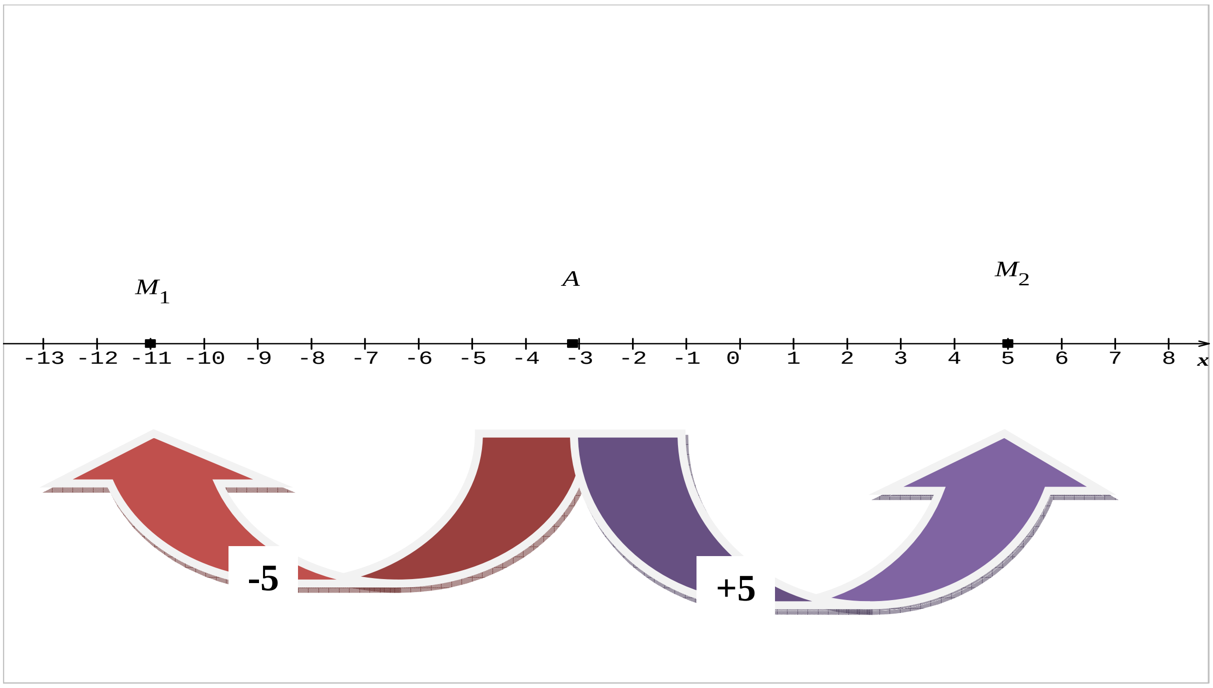
Méthode 1 :

Les nombres de valeur absolue +8 sont -8 et +8 , d'où :

a) $x + 3 = -8 \Leftrightarrow x = -11$.

b) $x + 3 = +8 \Leftrightarrow x = +5$

Donc : $S = \{-11 ; +5\}$.



Méthode 2 :

$|x + 3| = 8 \Leftrightarrow |x - (-3)| = 8$.

L'écart <u>arithmétique</u> <u>de</u> -3 <u>vers</u> x doit être de 8 , d'où :

$\begin{cases} x = -3 - 8 \Leftrightarrow x_1 = -11 \\ x = -3 + 8 \Leftrightarrow x_2 = +5 \end{cases}$, d'où : $S = \{-11 ; +5\}$.

Méthode 3 : Tableau de signes de $|x + 3| = 8$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$
$\lvert x + 3\rvert = 8$	$-x - 3 = 8$ $-x = +11$ $x = -11$		$x + 3 = 8$ $x = +5$

L'important est de s'assurer que les solutions sont bien dans leur zone de validité.

$x_1 = -11$ est bien dans $]-\infty ; -3]$ et $+5$ est dans $[-3 ; +\infty[$

Les deux solutions sont valables. $S = \{-11 ; +5\}$

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|-x - 1| = 2$.

Méthode 1 :

Les nombres de valeur absolue +2 sont -2 et +2 , d'où :

$$\begin{cases} -x - 1 = -2 \iff -x = -1 \iff x_1 = +1 \\ -x - 1 = +2 \iff -x = +3 \iff x_2 = -3 \end{cases} \text{, d'où : } S = \{-3\ ;\ +1\}\ .$$

Méthode 2 :

A l'évidence $|-A| = |A|$ = la valeur positive de $\{-A\ ;\ A\}$.

On peut donc changer de signe l'intérieur d'une valeur absolue.

(l'objectif est de faire apparaître un écart arithmétique entre d'un nombre vers x).

$$|-x - 1| = 2 \iff |x + 1| = 2 \iff |x - (-1)| = 2\ .$$

L'écart <u>arithmétique</u> <u>de</u> -1 <u>vers</u> x doit être de 2 , d'où :

$$\begin{cases} x = -1 - 2 \iff x_1 = -13 \\ x = -1 + 2 \iff x_2 = +1 \end{cases} \text{, d'où : } S = \{-3\ ;\ +1\}\ .$$

Méthode 3 : Tableau de signes de $|-x - 1| = 2$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x - 1$		$+$	0	$-$	
$\lvert -x - 1\rvert = 2$		$-x - 1 = 2$ $-x = +3$ $x = -3$		$x + 1 = 2$ $x = +1$	

$x_1 = -3$ est bien dans $]-\infty\ ;\ -1]$ et +1 est dans $[-1\ ;\ +\infty[$

Les deux solutions sont valables. $S = \{-3\ ;\ +1\}$

***<u>La méthode 3 , par tableau de signes est en fait la seule vraiment utilisable si l'équation présente plusieurs valeurs absolues</u>* :**

Exemple 3 : (par la 3$^{\text{ème}}$ méthode)

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x + 1| - 2|x - 2| = 0$.

<u>1$^{\text{ère}}$ présentation :</u>

x	$-\infty$		-1		$+2$		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x - 2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\lvert x + 1\rvert$		$-x - 1$	0	$x + 1$	$\vert$	$x - 1$	
$\lvert x - 2\rvert$		$-x + 2$	$\vert$	$-x + 2$	0	$x - 2$	

a) **Sur]-∞ ; -1]** .

$x + 1$ et $x - 2$ sont tous les deux négatifs, donc leur valeur absolue les change de signe.

$|x + 1| - 2|x - 2| = 0$ devient $(-x - 1) - 2(-x + 2) = 0$,

$-x - 1 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = +5$ <u>non valable</u> car <u>hors zone</u>.

b) **Sur [-1 ; +2]** .

seul $x - 2$ est négatif, donc sa valeur absolue le change de signe.

$|x + 1| - 2|x - 2| = 0$ devient $(x + 1) - 2(-x + 2) = 0$,

$x + 1 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = +3 \Leftrightarrow x = +1$ <u>valable</u> car <u>en zone</u>.

c) **Sur [+2 ; +∞[** .

$x + 1$ et $x - 2$ sont tous les deux positifs, donc leur valeur absolue ne les change pas.

$|x + 1| - 2|x - 2| = 0$ devient $(x + 1) - 2(x - 2) = 0$,

$x + 1 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = +5$ <u>valable</u> car <u>en zone</u>.

D'où : S = {+1 ; +5}.

<u>2ème présentation :</u> (en tableau)

x	$-\infty$		-1		+2		$+\infty$
$x + 1$		–	0	+	|	+	
$x - 2$		–	|	–	0	+	
$\|x + 1\|$		$-x - 1$	0	$x + 1$	|	$x - 1$	
$\|x - 2\|$		$-x + 2$	|	$-x + 2$	0	$x - 2$	
$\|x + 1\| - 2\|x - 2\| = 0$		$(-x - 1) - 2(-x + 2) = 0$ $x = +5$ non valable	|	$(x + 1) - 2(-x + 2) = 0$ $x = +1$ valable	|	$(x + 1) - 2(x - 2) = 0$ $x = +5$ valable	

D'où : S = {+1 ; +5}.

***Propriétés opératoires de la valeur absolue* :**

Comme une valeur absolue rend positif le nombre concerné, on peut conjecturer que :

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \quad \textbf{et} \quad \left|\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right| = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}$$

Cas particulier : $|-\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|$

Exemples : $|(-3) \times (+5)| = |-15| = +15$ et $|-3| \times |+5| = (+3) \times (+5) = +15$.

Par contre : $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

Plus généralement : $\big|\, |\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}| \,\big| \leq |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

Cette dernière formule signifie, plus simplement, que la valeur absolue de deux nombres est comprise entre la différence des valeurs non signées de ces deux nombres (plus grand moins plus petit), et la somme de ces valeurs non signées.

Exemple 1 : $||-3| - |+5|| = |3 - 5| = |-2| = +2$,

$|(-3) + (+5)| = |-3 + 5| = |+2| = +2$,

$|-3| + |+5| = 3 + 5 = +8$.

On a bien : $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.

Exemple 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|-2x + 6| = 5$.

On veut revenir à une présentation sous forme d'écart arithmétique (distance).

$|-2x + 6| = +5 \Leftrightarrow |-2(x - 3)| = +5 \Leftrightarrow |-2|\times|x - 3| = +5 \Leftrightarrow 2|x - 3| = +5$,

$|x - 3| = +\frac{5}{2}$.

x est à la distance $\frac{5}{2} = 2{,}5$ de $+3$, d'un côté ou de l'autre de ce nombre :

$\begin{cases} x = 3 - \frac{5}{2} = +\frac{1}{2} \\ x = 3 + \frac{5}{2} = +\frac{11}{2} \end{cases}$, soit $S = \{+\frac{1}{2} ; +\frac{11}{2}\}$.

Autres Propriétés :

Pour tout x réel : $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.

Ainsi : Si $a = -3$: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3 = |-3|$ et si $a = +3$: $\sqrt{(+3)^2} = \sqrt{9} = +3 = |+3|$.

On constate bien que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Preuve :

On sait que le résultat d'une racine est toujours positif ou nul.

Dire $\sqrt{a} = b$ impose $a \geq 0$ et $b \geq 0$, ainsi que $a = b^2$.

Ainsi : $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$.

Si $a > 0$: $\sqrt{a^2} = a$, qui vérifie les propriétés précédentes.

Si $a < 0$: $\sqrt{a^2} = -a$ afin que l'on ait $-a > 0$ et $(-a)^2 = a^2$.

On a bien montré que $\sqrt{a^2} = |a|$.

$\boldsymbol{a^2 = b^2 \Leftrightarrow \lvert a \rvert = \lvert b \rvert}$
Deux nombres sont de même carré si et seulement si ils ont égaux ou opposés, donc de même valeur absolue.

$a^2 = b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$, soit $|a| = |b|$.

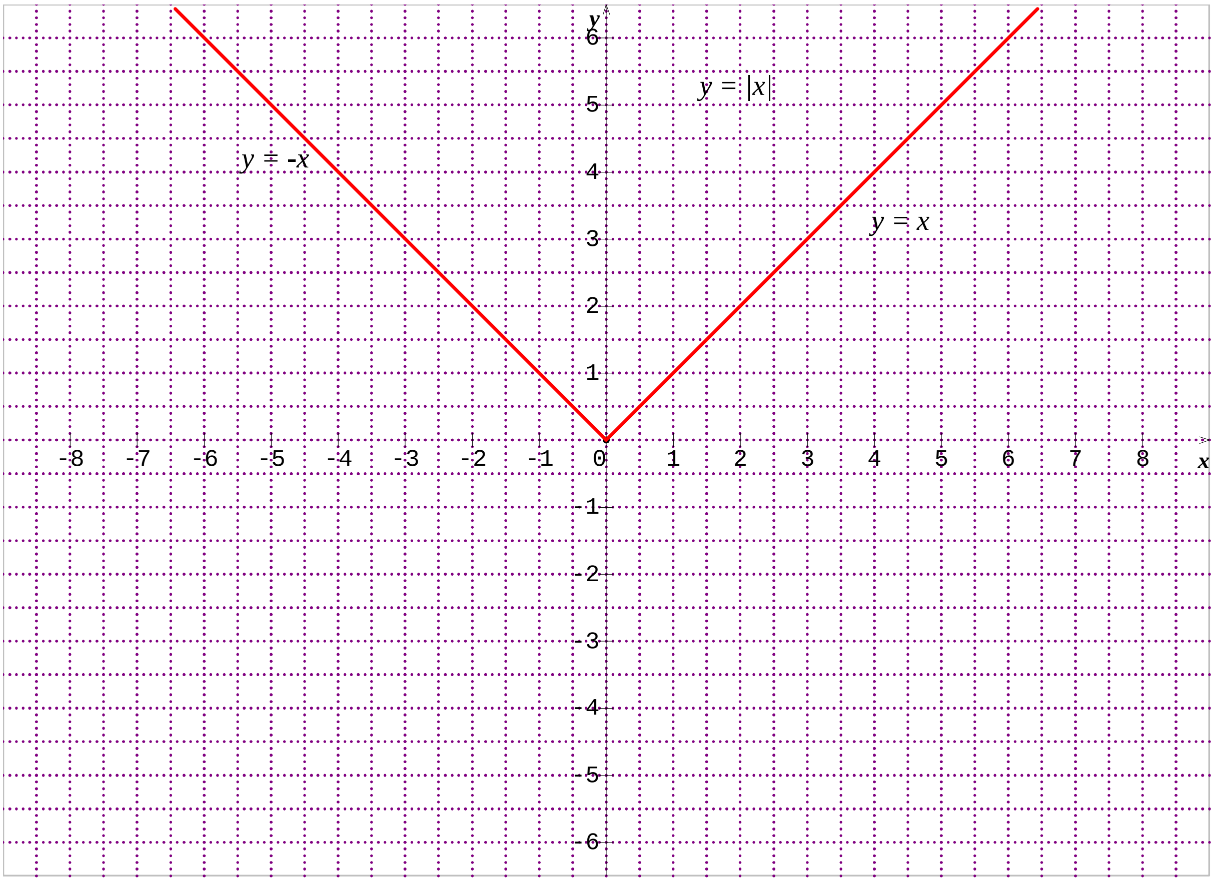
***Courbe représentative de* $f(x) = |x|$.**

Si $x < 0$, alors $f(x) = |x| = -x$ pour le rendre positif.

Si $x \geq 0$, alors $f(x) = |x| = x$.

On trace donc les deux demi-droites linéaires $y = -x$ (sur $]-\infty ; 0[$) et $y = x$ sur $[0 ; +\infty[$.

Ce sont les deux bissectrices des axes de coordonnées.

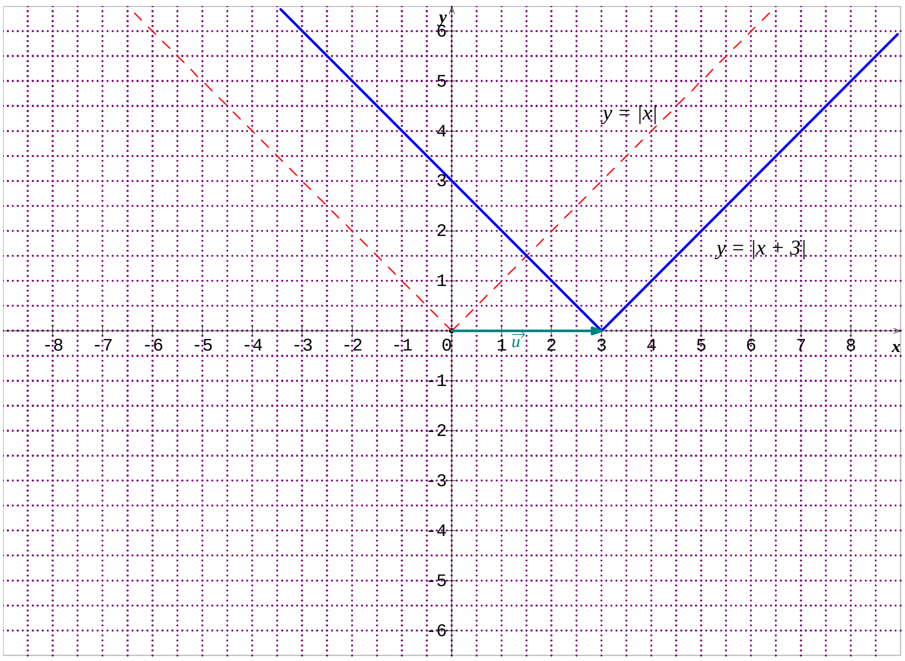


La valeur absolue d’un nombre étant toujours de résultat positif ou nul, une équation comme la suivante, ne peut admettre de solution : $|x + 4| = -3$.

Ceci est confirmé par le dessin des fonctions « valeur absolue », toujours situé au dessus ou sur l’axe des abscisses $x'x$.

Tracer la courbe représentative de $f(x) = |x - 3|$.

On sait que si x est *diminué* de 3 , il faut au contraire *avancer* la courbe représentative de +3 .



***Résoudre graphiquement* : $|x - 3| = 2$.**

On trace la droite horizontale d'ordonnée $y = 2$, qui coupe la courbe précédente en deux points d'abscisses respectives $x_1 = +1$ et $x_2 = +5$.

$S = \{+1 ; +5\}$.

***Résoudre graphiquement* : $|x - 3| = -3$.**

Cette équation ne peut admettre de solution.

On trace la droite horizontale d'ordonnée $y = -3$, qui ne coupe jamais la courbe précédente.

$S = \emptyset$.