Montrons que : $\mathbf{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'}$

Soit u une fonction dérivable en $x = a$ et v une fonction dérivable en $y = u(a)$.

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{x - a} ,$$

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} .$$

<u>*Remarques importantes*</u> :

Une fonction *dérivable* en un point est *continue* en ce point.

La continuité en a est un <u>préalable</u> indispensable à la dérivabilité en a .

Si la fonction n'est pas continue en a , elle ne peut pas y être dérivable.

<u>*Preuve*</u> :

$$\mathbf{f \text{ dérivable en } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ calculable dans } \mathbb{R} .}$$

Lorsque x tend vers a , l'écart $x - a$ devient nul, ce qui rend la fraction incalculable …. Sauf si :

si son numérateur devient lui-même nul (on a alors une forme *indéterminée*).

$\frac{4}{0}$ n'est pas calculable il n'existe pas de x réel tel que $x = \frac{4}{0}$, soit $0 \times x = 4$ (cas impossible).

Par contre :

$\frac{0}{0}$ est calculable, tout x réel étant solution : $x = \frac{0}{0} \Leftrightarrow 0 \times x = 0$, toujours vrai.

(cas indéterminé).

$\mathbf{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$ **n'est calculable que s'il se met en *forme indéterminée* , donc que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.**

$$\mathbf{f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Plus x se rapproche de a , plus $f(x)$ se rapproche de $f(a)$.

Il n'y a pas de *fracture* de la courbe représentative de f en $x = a$.

<u>*Retour à la dérivation de*</u> $v \circ u$:

v <u>dérivable</u> en $u(a)$ <u>impose</u> v <u>continue</u> en $u(a)$, soit $\lim_{y \to u(a)} v(y) = v[u(a)] \Leftrightarrow \lim_{y \to u(a)} \big(v(y) - v[u(a)]\big) = 0$.

Posons $y = u(x)$. On peut écrire $\lim_{x \to a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} = \lim_{y \to u(a)} \frac{v(y) - v[u(a)]}{y - u(a)} = v'[u(a)]$ calculable.

$$(v \circ u)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{v[u(x)] - v[u(a)]}{u(x) - u(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = v'[u(a)] \times u'(a) = (v' \circ u)(a) \times u'(a) ,$$

$\mathbf{(v \circ u)'(a) = [(v' \circ u) \times u'](a)}$.

Conclusion :

$$\begin{cases} u \text{ derivable en } x \\ v \text{ dérivable en } u(x) \end{cases} \Rightarrow v \circ u \text{ dérivable en } x,$$

$$\mathbf{(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'}$$

$$(v \circ u)'(x) = (v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'[u(x)] \times u'(x).$$

Formule d'usage, bien qu'incorrecte :

$$\mathbf{[v(u)]' = v'[u] \times u'}.$$

Exemple 1 :

Soit $f(x) = (x^2 + x - 1)^2$.

f est la composée de $\begin{cases} u : x \longrightarrow u(x) = x^2 + x - 1 \\ v : x \longrightarrow v(x) = x^2 \end{cases}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2x + 1 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^2 + x - 1) = (x^2 + x - 1)^2 = f(x)$.

$f = v \circ u \Rightarrow f' = (v' \circ u) \times u'$. (u' est écrit en rouge pour inciter à ne jamais l'oublier).

$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = 2[u(x)] \times u'(x) = 2(x^2 + x + 1)(2x + 1)$.

<u>*Méthode rapide*</u> :

f est de la forme u^2.

On dérive comme pour $(x^2)' = 2x$, sans oublier de multiplier par u'.

$f = u^2 \Rightarrow f' = 2u \times u'$, soit $f'(x) = 2(x^2 + x + 1)(2x + 1)$.

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{5x + 1}$.

f est la composée de $\begin{cases} u : x \longrightarrow u(x) = 5x + 1 \\ v : x \longrightarrow v(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 5 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$.

$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(5x + 1) = \dfrac{1}{5x + 1} = f(x)$.

$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = -\dfrac{1}{(u(x))^2} \times u'(x) = -\dfrac{1}{(5x + 1)^2} \times 5 = -\dfrac{5}{(5x + 1)^2}$.

<u>*Méthode rapide*</u> :

f est de la forme $\dfrac{1}{u}$.

On dérive comme pour $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, sans oublier de multiplier par u'.

$f = \dfrac{1}{u} \Rightarrow f' = -\dfrac{1}{u^2} \times u' = -\dfrac{u'}{u^2}$, soit $f'(x) = -\dfrac{5}{(5x + 1)^2}$.

Exemple 3 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$.

f est la composée de $\begin{cases} u : x \longrightarrow u(x) = x^3 + 2x^2 \\ v : x \longrightarrow v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 3x^2 + 4x \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.

$(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^3 + 2x^2) = \sqrt{x^3 + 2x^2} = f(x)$.

$f'(x) = v'[u(x)] \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}} \times (3x^2 + 4x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}$.

<u>*Méthode rapide*</u> :

f est de la forme $\sqrt{u}$.

On dérive comme pour $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, sans oublier de multiplier par u' .

$f = \sqrt{u} \Rightarrow f' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \times u' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, soit $f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 4x)}{2\sqrt{x^3 + 2x^2}}$.

Formules à retenir :

$$(u^n)' = n.u^{n-1}.\, u' \qquad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$