a) Pour être dérivable en $x = a$, la fonction f doit *préalablement* être définie en a .

Si $f(a)$ n'est pas calculable, inutile d'envisager la dérivabilité de f en $x = a$.

b) Il faut ensuite que f soit continue en a , autre *préalable*.

Si f n'est pas continue en $x = a$, elle ne peut pas y être dérivable.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

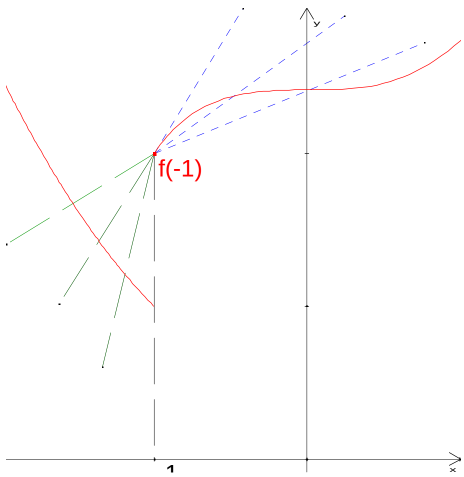
c) Il faut enfin que $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Les demi-tangentes à gauche et à droite, en $x = a$, doivent avoir le même coefficient directeur.

$\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

On ne parlera pas du cas où f n'est pas définie en $x = a$, ce qui exclue la possibilité d'y être dérivable.

1/ Cas de f définie en $x = a$, éventuellement continue d'un côté de a , discontinue de l'autre :



Sur ce graphique, on constate que $f(-1) = +2$ est défini (point de reprise de la courbe, à droite de -1), que f est continue à droite en $x = -1$.

($\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ où $x \to -1^+$ signifie que x tend vers -1 par valeurs supérieures à -1 , qui est aussi noté $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = f(-1)$).

Par contre, f est discontinue à gauche en $x = -1$.

($\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq f(-1)$ où $x \to -1^-$ signifie que x tend vers -1 par valeurs inférieures à -1 , aussi noté $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) \neq f(-1)$).

Dans ce cas :

- La dérivée de f à gauche est *infinie* , donc non calculable ($f'_g(-1) = \infty$, limite des *pentes* ou coefficients directeurs des *sécantes* issues du point de C_f d'abscisse -1 et ordonnée +2 , recoupant C_f à gauche de -1).

- La dérivée de f à droite est *finie* , *calculable*, ($f'_d(-1) = +1$ sur l'exemple , limite des *pentes* ou coefficients directeurs des *sécantes* issues du point de C_f d'abscisse -1 et ordonnée +2 , recoupant C_f à droite de -1).

N'étant pas dérivable à gauche, au total, f n'est pas dérivable en -1 .

On remarquera que les sécantes à gauche deviennent de plus en plus verticales lorsque leur second point de concours se rapproche de l'abscisse -1 par la gauche. La limite est *verticale* (non dérivable à gauche).

Preuve :

Si $x \longrightarrow -1^-$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +1$ (plus x se rapproche de -1 à gauche de cette valeur, *sans l'atteindre*, plus $f(x)$ se rapproche de l'ordonnée $y = +1$, d'après le graphique).

Donc : $\lim\limits_{x \to -1^-} [f(x) - f(-1)] = \lim\limits_{x \to -1^-} [f(x) - 2] = 1 - 2 = -1$,

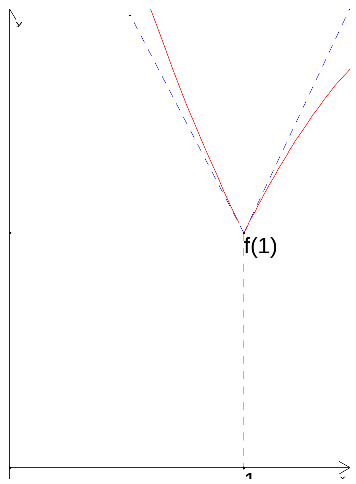
tandis que : $\lim\limits_{x \to -1^-} x = -1$ (par valeurs inférieures) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} (x - (-1)) = 0^-$.

On conclue : $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty$, sachant limite $\dfrac{-1}{0^-} = +\infty$.

(0^- signifie « presque 0 , sans l'atteindre, en restant négatif » , donc un rapport de plus en plus grand).

$f'_g(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = +\infty$ confirme une position limite verticale, donc de pente infinie.

<u>2/ Cas de f définie et continue en $x = a$, mais de demi-tangentes de pentes différentes</u>



Sur ce graphique, on constate que f est définie et continue en $x = +1$, avec $f(+1) = +1$.

Par contre :

$f'_g(+1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2$ (estimation graphique de la pente de la tangente à gauche) ,

$f'_d(+1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +1{,}5$ (estimation graphique de la pente de la tangente à droite) .

f n'est pas dérivable en $x = +1$ (f présente un *point anguleux* en $x = +1$).

Pour être *dérivable* en $x = +1$, il aurait fallu que les deux demi-tangentes soient alignées, donc que l'on ait :

$f'_g(+1) = f'_d(+1)$.