a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$: **Asymptote Verticale** $x = a$ **(cassure en** a **).**

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ **(nombre réel) : Asymptote Horizontale** $y = b$ **.**

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

α) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$: **Branche Parabolique sur l'axe** $y'y$ **(croissance très rapide).**

β) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ **(nombre réel) : Croissance Affine** $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b \text{ (Asymptotique Oblique } y = ax + b\text{)} \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = \pm\infty \text{ (sans asymptote oblique)} \end{cases}$.

γ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: **Branche Parabolique sur l'axe** $x'x$ **(croissance très lente).**

Expressions pratiques (sans validité mathématique) : $\begin{cases} \dfrac{1}{0} = \infty \text{ (diviser par } \textit{énorme} \text{ devient } \textit{minuscule}\text{)} \\ \dfrac{1}{\infty} = 0 \text{ (diviser par } \textit{minuscule} \text{ devient } \textit{énorme}\text{)} \end{cases}$.

Exemple a) : Asymptote verticale

Soit $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2}$ **. Etude de** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ **:**

<u>1</u>

$1^{\text{ère}}$ <u>méthode</u> : On notera $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) \text{ , par valeurs inférieures} \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) \text{ , par valeurs supérieures} \end{cases}$.

- Si $x \to -2^-$ (-2,1 ; -2,01 , -2,001 ….) : $\begin{cases} 2x - 1 \to 2(-2) - 1 = -5 \\ x + 2 \to (-2^-) + 2 = 0^- \end{cases}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-5}{0^-} = +\infty$.

- Si $x \to -2^+$ (-1,9 ; -1,99 , -1,999 ….) : $\begin{cases} 2x - 1 \to 2(-2) - 1 = -5 \\ x + 2 \to (-2^+) + 2 = 0^+ \end{cases}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-5}{0^+} = -\infty$.

On notera, plus sobrement : $\begin{cases} \text{Si } x \to -2^- \begin{cases} 2x - 1 \to -5 \\ x + 2 \to 0^- \end{cases} \text{, soit } \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \text{Si } x \to -2^+ \begin{cases} 2x - 1 \to -5 \\ x + 2 \to 0^+ \end{cases} \text{, soit } \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{cases}$.

En approchant de $x = -2$ (valeur interdite), $f(x)$ monte vers $+\infty$, ou descend vers $-\infty$ (fracture).

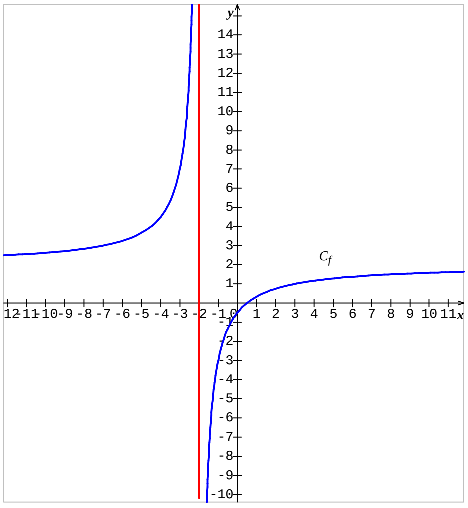
La courbe représentative présente une ***<u>asymptote verticale</u>*** *, d'équation* $\boldsymbol{x = -2}$.

$2^{\text{ème}}$ <u>méthode</u> : x ne peut prendre la valeur -2 , hors domaine.

On pose $x = -2 + h$, puis on fait tendre h vers 0 $\begin{cases} \text{soit par valeurs négatives } (h \to 0^- , x \to 2^-) \\ \text{soit par valeurs positives } (h \to 0^+ , x \to 2^+) \end{cases}$.

$f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{2(-2 + h) - 1}{(-2 + h) + 2} = \dfrac{-5 + 2h}{h} = 2 - \dfrac{5}{h}$. **Si** $\boldsymbol{h \to 0}$ **, alors** $\boldsymbol{\dfrac{1}{h} \to \infty}$.

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \left(2 - \dfrac{5}{h}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \left(2 - \dfrac{5}{h}\right) = -\infty \end{cases}$: ***<u>asymptote verticale</u>*** *, d'équation* $\boldsymbol{x = -2}$.



Exemple *b*) : Asymptote horizontale

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$. Etude de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$:

On factorise le degré x commun entre le numérateur et le dénominateur, afin de faire apparaître des termes $\dfrac{1}{x}$.

On exploite : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

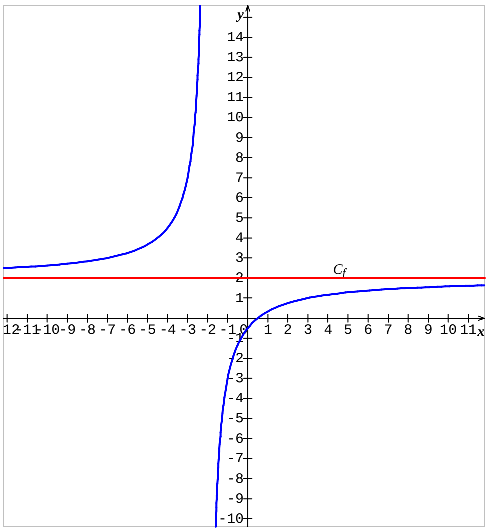
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} = \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$, d'où : $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}\right) = \frac{2}{1} = 2 .$$

Lorsque x tend vers les infinis, $f(x)$ tend vers l'ordonnée $+2$ (on peut préciser si par valeurs supérieures ou inférieures, en étudiant $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - 2)$).

La courbe représentative de f présente une ***asymptote horizontale***, d'ordonnée $\boldsymbol{y = +2}$.

On peut aussi dire, qu'aux infinis, un rapport de polynômes se comporte comme le rapport des plus hauts degrés.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2 .$$



Exemple c) α) : Branche parabolique sur l'axe $y'y$ (croissance infinie, très rapide)

Comme les puissances x^p avec $p > 1$ ou les exponentielles e^x .

Soit $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Etude de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$:

Plus x est important, plus sa plus forte puissance est seule significative :

$x = 10$: $x^3 = 1.000$ et $x^3 + 2x - 1 = 1.019$.

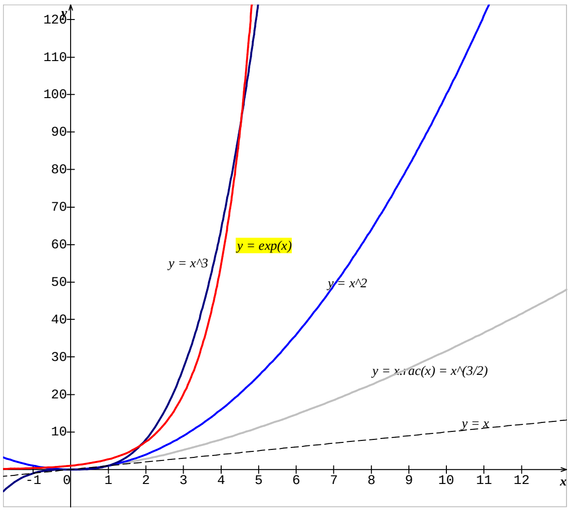
$x = 100$: $x^3 = 1.000.00$ et $x^3 + 2x - 1 = 1.001.009$ …

On peut aussi dire, qu'aux infinis, un polynôme se comporte comme son plus haut degré.

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^3) = \pm\infty .$$

Plus le degré du polynôme est important, plus la croissance est rapide, mais toujours inférieure à celle de e^x .

Ces croissances rapides vers l'infini, supérieures à celle d'une droite affine, sont appelées des *Branches paraboliques sur l'axe* $y'y$ (elles s'incurvent en se rapprochant plus de $y'y$ que de $x'x$).



La fonction $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 + x - 1}{x^2 + x + 1}$ aura une croissance aux infinis identique à $\dfrac{x^4}{x^2} = x^2$ (Branche parabolique en x^2).

Exemple c) β) : Branche affine – Croissance de droite oblique - avec asymptote oblique ou non.

1) Soit $f(x) = x + \sqrt{x}$. Etude de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On constate que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$.

Il faut étudier la « vitesse » de croissance de la courbe C_f .

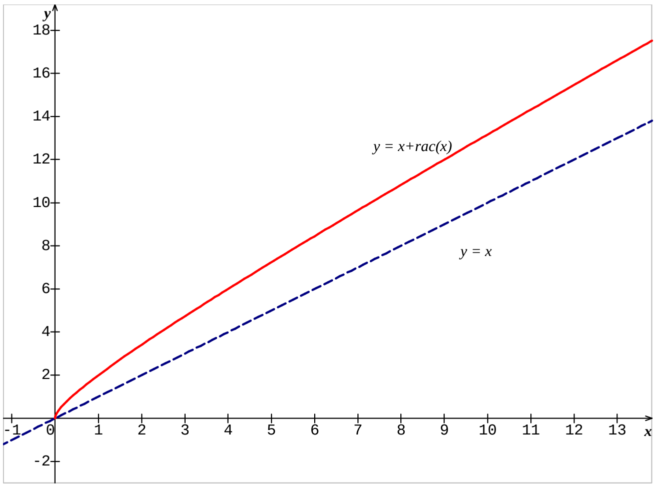
On compare la vitesse de $f(x)$ à celle de $y = x$ (bissectrice des axes) :

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, noté a . La croissance est de vitesse <u>similaire</u> à $y = x$.

On étudie l'écart à l'infini entre C_f et $y = x$:

$f(x) - ax = f(x) - x = \sqrt{x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = +\infty$. La courbe C_f prend l'inclinaison de $y = x$, mais le phénomène est lent, et la courbe C_f s'écarte infiniment de $y = x$, tout en prenant son inclinaison.

Il n'y a pas d'asymptote oblique.



2) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$. Etude de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$:

On constate que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty$.

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + x} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = a$. La croissance est de vitesse <u>similaire</u> à $y = x$.

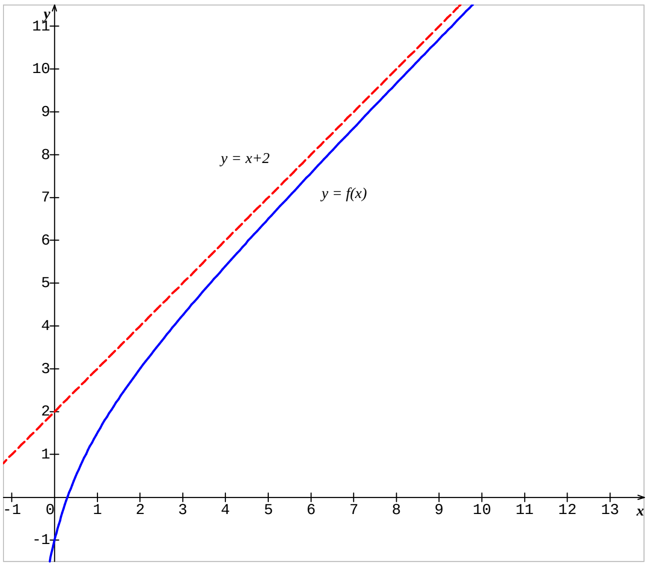
On étudie l'écart à l'infini entre C_f et $y = x$:

$f(x) - ax = f(x) - x = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} - x = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1} - \dfrac{x^2 + x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x - 1}{x + 1} = 2 = b$.

La courbe C_f prend l'inclinaison de $y = x$, et le phénomène est suffisamment rapide, pour que la courbe C_f se stabilise avec un écart vertical $+1$ au dessus de $y = x$, en prenant son inclinaison.

Il y a asymptote oblique $y = ax + b$, soit $y = x + 2$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \Leftrightarrow$ **Asymptote oblique** $D : y = ax + b$



Exemple c) γ) : Branche parabolique sur l'axe $x'x$ (croissance infinie, très lente)

Comme la fonction $\sqrt{x}$ ou les logarithmes $\ln(x)$.

Soit $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Etude de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On constate que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x-1} = +\infty$, sachant $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$.

Il faut étudier la « vitesse » de croissance de la courbe C_f .

On compare la vitesse de $f(x)$ à celle de $y = x$ (bissectrice des axes) :

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x} = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x^2}} = \sqrt{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}}$, où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

La croissance vers l'infini de x est beaucoup plus forte que la propre croissance vers l'infini de $f(x)$, ce qui fait que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers 0 , comme le fait $\dfrac{1}{\infty}$.

Cette croissance lente vers l'infini, inférieure à celle d'une droite affine, est appelée *Branche parabolique sur* $x'x$ (elle s'incurve en se rapprochant plus de $x'x$ que de $y'y$).