# CHAPITRE 10 : LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## 1. Définition de la fonction logarithme népérien

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$ , est définie sur $]0,+\infty[$ , prend la valeur 0 en $x=1$, est continue sur $]0,+\infty[$ et admet pour dérivée la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

## 2. Propriétés algébriques

### 2.1. Relation fonctionnelle

**Théorème**

$$\forall a \in \,]0,+\infty[, \quad \forall b \in \,]0,+\infty[ \qquad \ln ab = \ln a + \ln b$$

**Démonstration**

Soit a un réel strictement positif.

Soit la fonction $\varphi_a$ définie sur $]0\,,+\infty[$ par $\varphi_a(x) = \ln(ax)$ .

La fonction $\varphi_a$ est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ comme composée de deux fonctions .

Donc, $\forall x \in \,]0\,,+\infty[ :\ \varphi_a\,'(x) = a.\dfrac{1}{ax} = \dfrac{1}{x}$

$\varphi_a$ est donc une primitive de $\dfrac{1}{x}$ ; elle diffère donc de ln d'une constante. Il existe donc un réel C tel que, $\forall x \in \,]0\,,+\infty[\ : \varphi_a(x) = \ln x + C$ . Or, $\ln 1 = 0$, donc $C = \varphi_a(1) = \ln a$ .

En revenant à la définition de $\varphi_a$ :

$\forall a \in \,]0\,,+\infty[$ et $\forall x \in \,]0\,,+\infty[$ , $\ln(ax) = \ln x + \ln a$

D'où le résultat en remplaçant x par b.

## *2.2. Logarithme d'un quotient*

### Propriété

$$\forall a \in \,]0,+\infty[ \qquad \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

### Démonstration

Elle se déduit de la relation précédente : calculons

$$\forall a \in \,]0,+\infty[ \qquad \ln\frac{1}{a} + \ln a = \ln(\frac{1}{a}.\,a) = \ln 1 = 0$$

### Propriété

$$\forall a \in \,]0,+\infty[,\ \ \forall b \in \,]0,+\infty[ \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

### Démonstration

Elle se déduit des deux relations précédentes : calculons

$$\forall a \in \,]0,+\infty[,\ \ \forall b \in \,]0,+\infty[ \qquad \ln\frac{a}{b} = \ln(a.\frac{1}{b}) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

### *2.3. Logarithme d'un produit de nombres réels strictement positifs*

**Propriété**

$\forall a \in \left]0,+\infty\right[,\ \ \forall n \in \qquad \ln a^n = n \ln a$

### *2.4. Logarithme d'une racine carrée*

**Propriété**

$\forall a \in \left]0,+\infty\right[ \qquad \ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

## 3. Résolution d'équations et d'inéquations

**Théorème**

$\forall a \in \left]0,+\infty\right[,\ \ \forall b \in \left]0,+\infty\right[ \qquad \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

$\forall a \in \left]0,+\infty\right[,\ \ \forall b \in \left]0,+\infty\right[ \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$

**Exemple**

Résoudre dans $R$ l'équation : $\ln(3x+1) = \ln(x-4)$

Les valeurs cherchées doivent vérifier

$$\begin{cases} 3x+1>0 \\ x-4>0 \end{cases}$$

Les solutions doivent appartenir à $D = \left]\ 4\ ,+\infty\right[$

Les logarithmes de deux réels positifs sont égaux, si et seulement si ces réels sont égaux.

Ainsi : si $x \in \left] 4 , +\infty \right[$ , $\ln(3x+1) = \ln(x-4) \Leftrightarrow 3x+1 = x-4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

L'équation n'admet pas de solution dans R puisque $-\frac{5}{2} \notin \left] 4 , +\infty \right[$

## Exemple

Résoudre dans *R*

a. l'équation $\ln(x^2-5) = \ln x + 2\ln 2$

b. l'inéquation : $\ln(x^2-5) \leq \ln x + 2\ln 2$

a. Les valeurs cherchées doivent vérifier

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Les solutions doivent appartenir à $D = \left] \sqrt{5} , +\infty \right[$

Les logarithmes de deux réels positifs sont égaux, si et seulement si ces réels sont égaux.

Si $x \in \left] \sqrt{5} , +\infty \right[$ , $\ln(x^2-5) = \ln x + 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(x^2-5) = \ln(4x) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

L'équation du second degré admet $-1$ *et* $5$ pour racines. Seule la racine 5 est solution puisque $-1 \notin \left] \sqrt{5} , +\infty \right[$

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x^2-5) = \ln x + 2\ln 2$ est $S = \left\{ 5 \right\}$

b. On résout l'inéquation dans $D = \left] \sqrt{5} , +\infty \right[$

L'inéquation $\ln(x^2-5) \leq \ln x + 2\ln 2$ est équivalente à $x^2 - 5 < 4x$ *ou* $x^2 - 4x - 5 < 0$

L'ensemble des solutions est donc formé des réels $\in \left] -1 , 5 \right[$ qui sont dans D.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x^2-5) < \ln x + 2\ln 2$ est $S = \left] \sqrt{5} , 5 \right[$

# 4. Etude de la fonction logarithme

## *4.1. Sens de variation de la fonction logarithme népérien sur* $]0,+\infty[$

*La fonction* $x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$

*La fonction* $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$

*La fonction* $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Pour tout $x \in ]0,+\infty[$ , $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

### Théorème

*La fonction* $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

## *4.2. Limite de la fonction logarithme népérien en 0 et en* $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\forall n \in R,\ \ln(2^n) = n \ln 2$, et puisque $\ln 2 > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (n \ln 2) = +\infty$.

La fonction ln n'est donc pas majorée. Etant croissante, elle admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.

### Conséquence

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

## Démonstration

En utilisant le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \;\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\frac{1}{x} = +\infty$$

Puisque $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ *alors* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

### *4.3. Tableau de variation :*

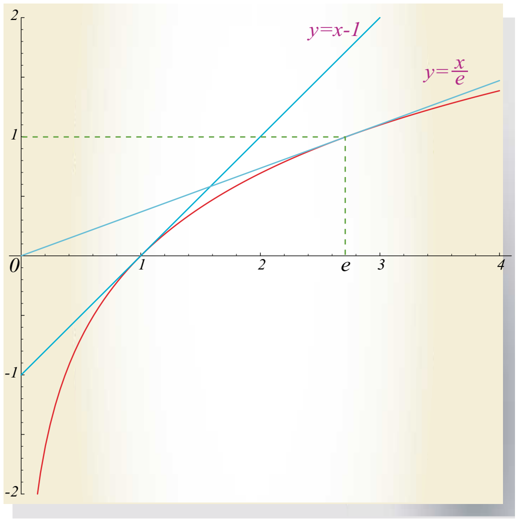
| $x$ | 0 | | 1 | | + |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | + | | |
| $f(x)$ | - | $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ | + |

## Conséquence

Il existe un nombre et un seul noté e tel que $\ln e = 1$

Une valeur approchée de e est $e \sim 2.71828$

### *4.4. Représentation graphique*




**Remarque**

Soit (C) la courbe représentative de la fonction ln dans un repère $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x=1$ est la droite d'équation $y=x-1$

La tangente à la courbe au point d'abscisse $x=e$ est la droite d'équation $y=\dfrac{x}{e}$ (cette droite passe par le point O)

## 5. Autres limites

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ que l'on peut aussi écrire $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$

**Démonstration**

Le nombre dérivé de ln en 1 est 1. Mais ce nombre dérivé est aussi : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=1$

D'où la limite cherchée.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

## Démonstration

Par exemple en étudiant la fonction auxiliaire $\varphi : \ x \mapsto \ln x - \sqrt{x}$

on montre que $\forall x \in [\ 1\ ,+\infty\ [\ ,\ \ \ln x < \sqrt{x}$

et donc $\forall x \in [\ 1\ ,+\infty\ [\ ,\ \ \frac{\ln x}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

soit $\forall x \in [\ 1\ ,+\infty\ [\ ,\ \ 0 < \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} < \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

## Démonstration

$$\forall x \in \ ]\,0,+\infty\,[\ ,\quad x \ln x = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

On applique le théorème sur la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0^{-}$$

car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$