L'objectif de l'exercice est de comparer deux suites basées sur une même fonction, l'une étant fonctionnelle, et l'autre récurrente. Chaque partie de l'exercice est indépendante des autres.

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Faire une étude rapide de f. Tracer sa courbe représentative C_f .

Partie B :

Soit la suite (W_n) telle que $W_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, pour tout n entier naturel, soit $W_n=f(n)$.

1/ Placer W_0 , W_1 , W_2 , W_3 , W_4 , W_5 sur l'axe des ordonnées $y'y$, et les points correspondants de la courbe C_f .

2/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

Partie C :

Soit la suite (U_n) telle que $U_0=1$ et $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$, pour tout n entier naturel, soit $U_{n+1}=f(U_n)$.

1/ Placer U_0 , U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 sur l'axe des ordonnées $y'y$, comme sur celui des abscisses $x'x$, ainsi que les points correspondants de la courbe C_f .

2/ Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3/ Calculer la valeur exacte de U_1 , U_2 et U_3 . Conjecturer l'écriture littérale de U_n .

4/ Vérifier cette nouvelle conjecture par récurrence.

5/ Soit g la fonction telle que $g(n)=U_n$.

Après une étude rapide de la fonction g , retrouver graphiquement les valeurs de U_1 , U_2 , U_3 , U_4 , U_5 .

Partie D :

Soit à nouveau la suite (U_n) telle que $U_0=1$ et $U_{n+1}=\dfrac{U_n}{\sqrt{U_n^2+1}}$, pour tout n entier naturel.

1/ Montrer que la suite (U_n) est à termes positifs.

2/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite L lorsque n tend vers l'infini.

4/ Soit la suite (V_n) définie par $V_n=\dfrac{1}{U_n^2}$ pour tout entier naturel n .

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique. Préciser sa raison.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Retrouver ainsi la limite L de la suite (U_n) .