a) A l'aide du logarithme népérien, vérifier que $(e^x)^2 = e^{2x}$.

La fonction "ln" , logarithme népérien est *injective* , soit : $\ln(A) = \ln(B) \Leftrightarrow A = B$.

On sait que $e^A > 0$, donc on peut en prendre le logarithme.

Comme $\ln(A^n) = n.\ln(A)$: $\ln[(e^x)^2] = 2\ln(e^x) = 2x$, puisque les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproques l'une de l'autre, soit $\begin{cases} \ln(e^x) = x \text{ , pour tout } x \text{ réel} \\ e^{\ln(x)} = x \text{ , pour tout } x \text{ réel, strictement positif} \end{cases}$.

De même : $\ln(e^{2x}) = 2x$ pour la même raison.

En conséquence : $\ln[(e^x)^2] = \ln(e^{2x}) \Leftrightarrow (e^x)^2 = e^{2x}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$.

$e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x - 4 = 0$.

Posons le changement de variable $X = e^x$, ce qui impose $X > 0$.

L'équation devient $X^2 - 3X - 4 = 0$, de racines $\begin{cases} X' = -1 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ (impossible)} \\ X'' = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4) = \ln(2^2)\ 2\ln(2) \text{ , avec } \ln(2) \approx 0{,}693 \end{cases}$.

Conclusion : $S = \{2\ln(2)\}$.