

Résoudre dans \mathbb{R} : $e^{-2x} + e^{-x} - 2 \leq 0$.

Soit le changement de variable $X = e^{-x}$, qui implique $e^{-2x} = (e^{-x})^2 = X^2$.

L'inéquation devient : $X^2 + X - 2 \leq 0$.

Les racines sont $X_1 = -2$ et $X_2 = +1$.

Pour que le trinôme du second degré soit négatif ou nul, X doit se situer entre ou sur les racines X_1 et X_2 .

D'où : $X^2 + X - 2 \leq 0 \Leftrightarrow X \leq -2$ ou $X \geq +1 \Leftrightarrow -2 \leq e^{-x} \leq +1$.

Une exponentielle est toujours de valeur strictement positive, donc l'inéquation équivaut à : $0 \leq e^{-x} \leq +1$.

$e^{-x} \leq +1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^0$. La fonction exponentielle conserve les ordres, soit $e^A \leq e^B \Leftrightarrow A \leq B$.

D'où : $e^{-x} \leq e^0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

On conclue : $S = [0 ; +\infty[$.