

**Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $e^{-2x} + e^{-x} - 2 \leq 0$  .**

Soit le changement de variable  $X = e^{-x}$ , qui implique  $e^{-2x} = (e^{-x})^2 = X^2$  .

L'inéquation devient :  $X^2 + X - 2 \leq 0$  .

Les racines sont  $X_1 = -2$  et  $X_2 = +1$  .

Pour que le trinôme du second degré soit négatif ou nul,  $X$  doit se situer entre ou sur les racines  $X_1$  et  $X_2$  .

D'où :  $X^2 + X - 2 \leq 0 \Leftrightarrow X \leq -2$  ou  $X \geq +1 \Leftrightarrow -2 \leq e^{-x} \leq +1$  .

Une exponentielle est toujours de valeur strictement positive, donc l'inéquation équivaut à :  $0 \leq e^{-x} \leq +1$  .

$e^{-x} \leq +1 \Leftrightarrow e^{-x} \leq e^0$  . La fonction exponentielle conserve les ordres, soit  $e^A \leq e^B \Leftrightarrow A \leq B$  .

D'où :  $e^{-x} \leq e^0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$  .

On conclue :  $S = [0 ; +\infty[$  .