Soit $f(x) = \dfrac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1}$. Calculer $f'(x)$, après avoir précisé le domaine de définition de f .

$f(x)$ est calculable sauf si $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow -x = \ln 1 = 0$, soit $x = 0$ seule valeur réelle qui n'admette pas d'image par f , soit $D = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, avec $(e^{-x})' = (e^{-x}) \times (-1) = -e^{-x}$, sachant $(e^u)' = (e^u) \times u'$.

$$f'(x) = \frac{(-e^{-x})(e^{-x} - 1) - (-e^{-x})(e^{-x} + 1)}{(e^{-x} - 1)^2} = \frac{-e^{-2x} + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2} = \frac{2e^{-x}}{(e^{-x} - 1)^2} .$$

Sachant $e^A > 0$ pour tout A réel, on remarque que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction f est continue, strictement croissante sur son domaine de définition.