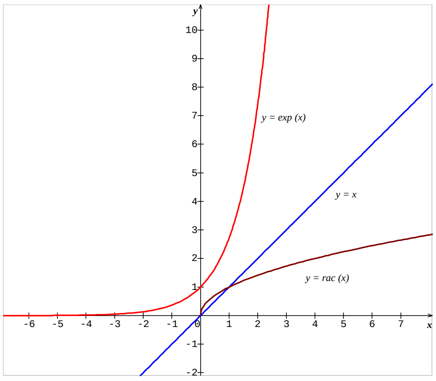
Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ **, montrer :**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$ **.**

Si l'on considère les croissances à l'infini de e^x , x et $\sqrt{x}$, on peut deviner que celle de e^x étant infiniment plus rapide que celle de x , elle doit l'être de $\sqrt{x}$, donc que la démonstration est aisée.



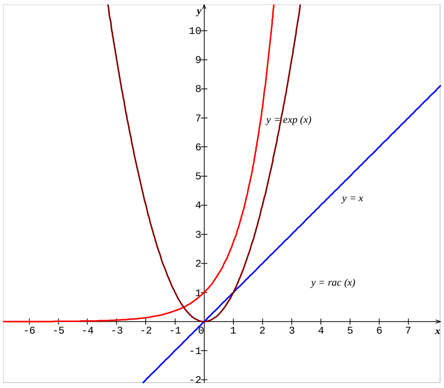
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} \times \sqrt{x}\right) = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}\right) \times \left(\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\right) .$$

Ces deux limites étant $+\infty$, leur produit est $+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ **.**

Par contre, il semble moins prévisible que la croissance à l'infini de e^x soit infiniment plus rapide que celle de x^2 , ce qui est pourtant le cas, comme pour tout x^α , si $\alpha > 0$.



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(e^{x/2})^2}{x^2} .$$

Posons $X = \dfrac{x}{2}$, soit $x = 2X$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{X \to +\infty} \frac{(e^X)^2}{4X^2} = \frac{1}{4}\left(\lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X}\right)^2 .$$

On conclue $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$, sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.