Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}}$ (on distinguera les cas $x < 0$ et $x > 0$).

a) Si $x < 0$, soit $x \to 0^-$, alors $\frac{1}{x} \to -\infty$, $-\frac{1}{x} \to +\infty$ et $e^{-\frac{1}{x}} \to +\infty$.

Le produit $\frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}}$ tend donc vers $(-\infty) \times (+\infty) = -\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$.

b) Si $x > 0$, soit $x \to 0^+$, alors $\frac{1}{x} \to +\infty$, $-\frac{1}{x} \to -\infty$ et $e^{-\frac{1}{x}} \to 0^+$.

Le produit $\frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}}$ est indéterminé, de forme $0 \times \infty$.

Posons $X = -\frac{1}{x}$, soit $\frac{1}{x} = -X$. Comme $x \to 0^+$, alors $X = -\frac{1}{x} \to -\infty$.

On déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}.e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to -\infty} (-X.e^X) = -\lim\limits_{X \to -\infty} X.e^X = 0^-$.