

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1$, formule dont on va se rapprocher.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} .$$

Soit le changement de variable $X = 2x$, avec $X \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 2 \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 2e^0 = 2 .$$

Autre méthode : $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{x} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) = 1 \times 2 = 2 .$$