1. De la fonction exponentielle (de base e) à la fonction logarithme népérien

1.1. Théorème

La fonction exponentielle (de base **e**) est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$$

Démonstration :

- **Continuité**

  La fonction exponentielle est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle $y' = y$. Elle est donc nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent continue sur $\mathbb{R}$.

- **Stricte monotonie**

  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

  Remarque : la croissance de l'exponentielle se traduit par :

$$\boxed{\mathbf{e}^x \leqslant \mathbf{e}^y \iff x \leqslant y}$$

(Voir illustration, figure 1)

  Cette dernière propriété sera très utile pour établir des inégalités ou pour résoudre des inéquations.

- **Limites**

  Montrons, tout d'abord, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{e}^x \geqslant x}$$

  Pour cela, on étudie les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathbf{e}^x - x$$

> Technique à connaître : pour comparer deux quantités, on étudie le signe de leur différence.

  La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \mathbf{e}^x - 1 = \mathbf{e}^x - \mathbf{e}^0$$

  Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

$$x \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x \geqslant \mathbf{e}^0 \iff g'(x) \geqslant 0$$

  D'où le sens de variation de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de la dérivée g'		$-$	0	$+$	
Variations de la fonction g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

  La fonction g admet un minimum m strictement positif en 0 :

$$m = g(0) = \mathbf{e}^0 - 0 = 1$$

  Par conséquent la fonction g est strictement positive pour tout réel x, d'où :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \mathbf{e}^x \geqslant x$$

Or, nous savons que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Du théorème de comparaison des limites, on en déduit que l'exponentielle admet une limite en $+\infty$ et :

$$\lim_{x \to +\infty} \mathbf{e}^x = +\infty$$

Posons $X = -x$. Si x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$.

Compte tenu de la relation $\mathbf{e}^x = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^X}$ nous avons :

$$\lim_{x \to -\infty} \mathbf{e}^x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\mathbf{e}^X} = 0 \ \left(\text{puisque } \lim_{X \to +\infty} \mathbf{e}^X = +\infty\right)$$

La courbe de la fonction exponentielle admet donc, en $-\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.1.

Exercices :

- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 1 + x \leqslant \mathbf{e}^x$
- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $\quad 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathbf{e}^x$
- Déterminer l'approximation affine de la fonction exponentielle au voisinage de 0.

1.2. Corollaire

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration :

On rappelle qu'une application $f : E \to F$ est une bijection lorsque **tout élément $\boldsymbol{\lambda}$ de $\boldsymbol{F}$ admet un et un seul antécédent $\boldsymbol{c}$ dans $\boldsymbol{E}$** (ou de manière équivalente, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une unique solution c dans E).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction exponentielle est continue et strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de bijection assure l'existence d'un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{e}^c = \lambda$.

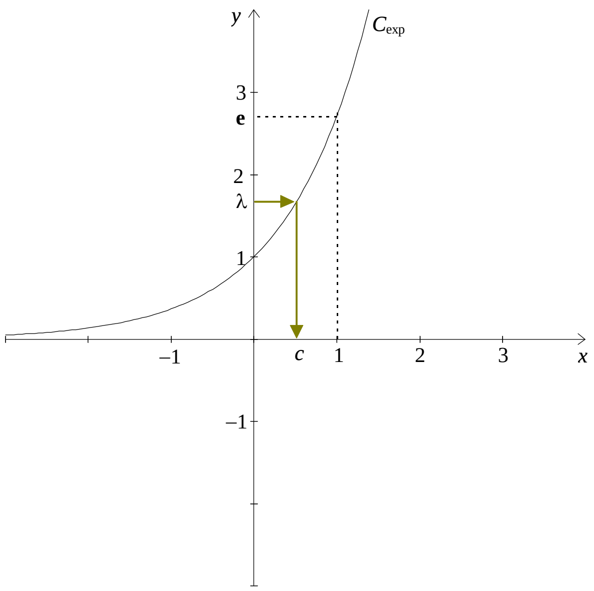

Figure 1

Conséquence : l'exponentielle étant bijective, on a :

$$\mathbf{e}^A = \mathbf{e}^B \Leftrightarrow A = B$$

1.3 Définition

On appelle fonction logarithme népérien la bijection réciproque de la fonction exponentielle. On la note ln.

La fonction ln est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$\ln(x)$ n'a de sens que pour $x > 0$

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe de la fonction logarithme (voir figure 2) dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On a donc $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y = \ln(x)$.

Comme la fonction ln est la bijection réciproque de la fonction exponentielle, on a alors $x = \mathbf{e}^y$. Donc le point $M'(y, x)$ est situé sur la courbe de la fonction exponentielle. Or, le point $M'(y, x)$ est le symétrique(1) du point $M(x, y)$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$. En conséquence :

Les courbes $C_{\exp}$ et $C_{\ln}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ (droite d'équation $y = x$)

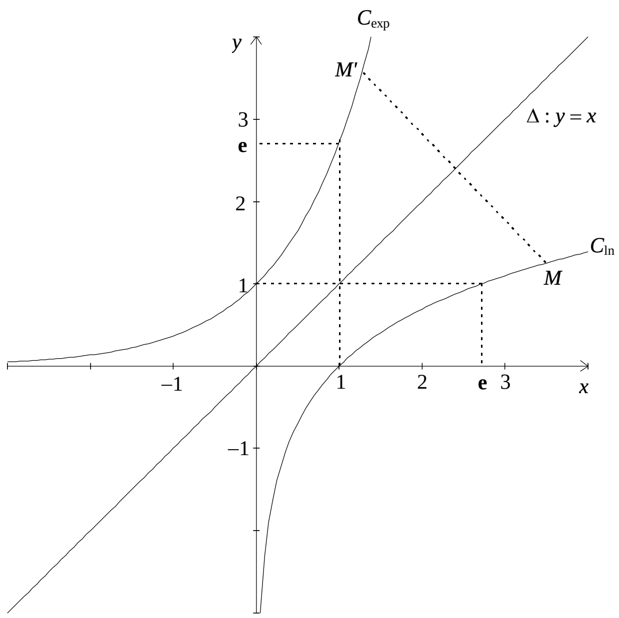

Figure 2

Puisque les fonctions exp et ln sont réciproques l'une de l'autre, on a :

$$\ln\left(\mathbf{e}^x\right) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{e}^{\ln(x)} = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$(B = \ln(A) \text{ et } A > 0) \Leftrightarrow (A = \mathbf{e}^B)$$

Et également : $\ln(\mathbf{e}) = 1$; $\ln(1) = 0$

Exercices :

- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $2x \leqslant \mathbf{e}^x$

  A-t-on : $3x \leqslant \mathbf{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Soit $a \in \mathbb{R}$. En étudiant la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \mathbf{e}^x - ax$, déterminer le plus grand réel a tel que : $ax \leqslant \mathbf{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Interpréter graphiquement en terme de tangentes (à des courbes que l'on précisera)

- Comparer sur $\mathbb{R}$, $\mathbf{e}^x$ et x^2. Puis $\mathbf{e}^x$ et x^3.

(1) En effet, le milieu du segment $[MM']$ est bien sur Δ et d'autre part les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ $(y - x ; x - y)$ et $\vec{u}$ $(1 ; 1)$ sont bien orthogonaux.

1.4. Théorème *Autres limites avec des exponentielles*

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty$$ $$\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathbf{e}^x = 0$$
- En particulier : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$$ $$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^x = 0$$
- Tangente à l'origine : $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = 1$$

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Démonstration :

- Montrons : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty$$

  On sait que pour tout $X \in \mathbb{R}$: $$\mathbf{e}^X \geqslant X$$

  En particulier pour $X = \dfrac{x}{n+1}$: $$\mathbf{e}^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \frac{x}{n+1}$$

  Par croissance de l'application $t \longmapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

  $$\mathbf{e}^x \geqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$$

  D'où, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $$\frac{\mathbf{e}^x}{x^n} \geqslant \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$$

  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$, on en déduit facilement par comparaison que :

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^n} = +\infty$$

  En posant $u = -x$, on en déduit : $$\lim_{x\to-\infty} |\,x^n\,\mathbf{e}^x\,| = \lim_{u\to+\infty} \frac{u^n}{\mathbf{e}^u} = 0$$

  D'où : $$\lim_{x\to-\infty} x^n\,\mathbf{e}^x = 0$$

- En particulier pour $n = 1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathbf{e}^x = 0$
- Pour la troisième limite, nous reconnaissons l'accroissement moyen de la fonction exponentielle en 0, sa limite est donc égale au nombre dérivé en 0 à savoir $\mathbf{e}^0 = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^0}{x - 0} = \exp'0 = \mathbf{e}^0 = 1$$

Conséquence des deux dernières limites : Soit P un polynôme différent du polynôme nul ($P \neq 0$).

On a alors : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{|P(x)|} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x)\,\mathbf{e}^x = 0$$

Preuve : notons n le degré de P. On sait qu'alors :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{|P(x)|} = +\infty$$

Par ailleurs, d'après 1.4. : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x^{n+1}} = +\infty$$

D'où, par produit : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{|P(x)|} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, il suffit de développer et d'utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathbf{e}^x = 0$

Exercice : Étudier la limite suivante : $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}}$$

(On écrit simplement $\dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{x} \times \sqrt{x}$ et on en déduit, par produit : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathbf{e}^x - 1}{\sqrt{x}} = 1 \times 0 = 0$)

2. Étude de la fonction logarithme népérien

2.1. Théorème

La fonction ln transforme les produits en somme :

pour tous réels A et B strictement positifs : $\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$

Démonstration :

Comme l'exponentielle transforme les sommes en produits, on a :

$$\mathbf{e}^{\ln(A)+\ln(B)} = \mathbf{e}^{\ln(A)}\,\mathbf{e}^{\ln(B)} = AB$$

D'où : $$\ln(A) + \ln(B) = \ln(AB)$$

2.2. Corollaire

Pour tous A et B strictement positifs : $$\ln\left(\frac{1}{B}\right) = -\ln(B)$$

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

$$\ln(A^p) = p\ln(A) \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

Démonstration :

- D'après 2.1. : $$\ln\left(\frac{1}{B}\right) + \ln(B) = \ln(1) = 0$$

D'où : $$\ln\left(\frac{1}{B}\right) = -\ln(B)$$

- De même : $$\ln\left(\frac{A}{B}\right) + \ln(B) = \ln(A)$$

D'où : $$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln(A) - \ln(B)$$

- Si $p \geqslant 0$, une récurrence élémentaire donne : $\ln(A^p) = p\ln(A)$

Si $p \leqslant 0$, alors : $$\ln(A^p) = \ln\frac{1}{A^{-p}} = -\ln(A^{-p})$$

Mais comme $-p \geqslant 0$: $$\ln(A^{-p}) = -p\ln(A)$$

D'où : $$\ln(A^p) = p\ln(A)$$

- Comme $A > 0$: $$\ln(A) = \ln\left(\sqrt{A}\sqrt{A}\right) = \ln\left(\sqrt{A}\right) + \ln\left(\sqrt{A}\right) = 2\ln\left(\sqrt{A}\right)$$

D'où : $$\ln\left(\sqrt{A}\right) = \frac{1}{2}\ln(A)$$

2.3. Théorème *Continuité du logarithme*

La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration :

On pourrait utiliser le théorème de la continuité de l'application réciproque (voir théorème 5.4. de la leçon sur la continuité) pour conclure immédiatement (puisque le logarithme est l'application réciproque de l'exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$). Mais celui-ci est hors programme. Nous allons donc procéder autrement. Avant tout, nous aurons besoin du lemme suivant, bien pratique :

Lemme

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$: $$\ln(x) \leqslant x - 1$$

Démonstration du lemme :

S'il existait un réel $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $$\ln(x) > x - 1$$

Alors, par stricte croissance de l'exponentielle, on aurait :

$$x > \mathbf{e}^{x-1}$$

C'est-à-dire, en posant $u = x - 1$: $$1 + u > \mathbf{e}^u$$

Ce que contredirait l'inégalité $\mathbf{e}^u \geqslant u + 1$, valable pour tout $u \in \mathbb{R}$ (voir exercice en 1.1.)

D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $$\ln(x) \leqslant x - 1$$

Démonstration du théorème 2.3. :

Premier pas : on montre que la fonction logarithme est continue en 1. Il suffit pour cela, de montrer qu'elle admet une limite finie (égale à $\ln 1 = 0$). Distinguons deux cas.

Limite à droite

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, le lemme permet d'écrire : $0 < \ln(x) \leqslant x - 1$

Et d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x) = 0$

Limite à gauche

Pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\ln(x) < 0$

Mais d'après les propriétés du logarithme, on obtient :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Et d'après le lemme, on peut écrire : $0 < \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1$

Et d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(x) = 0$

Les limites à droite et à gauche sont égales à ln(1), ce qui prouve la continuité du logarithme en 1.

Deuxième pas : on montre que la fonction logarithme est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $h > -a$: $\ln(a+h) = \ln\left[a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right] = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{h}{a}\right)$

Comme la fonction ln est continue en 1 : $\lim\limits_{h \to 0} \ln\left(1+\frac{h}{a}\right) = \ln(1) = 0$

D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \ln(a+h) = \ln(a)$

Ce qui prouve la continuité de la fonction ln en a.

Donc la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.4. Théorème *Dérivabilité du logarithme*

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Démonstration :

On pourrait utiliser le théorème de dérivation de l'application réciproque (voir théorème 5.3. dans la leçon sur la dérivabilité) mais celui-ci est hors programme. Procédons par changement de variable.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Étudions la limite, lorsque h tend vers 0, de l'accroissement moyen :

$$\frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$$

(On considère des valeurs de h suffisamment proches de 0 ($h > -x$) pour que $\ln(x+h)$ ait un sens)

D'après 2.2. : $\ln(x+h) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

Posons $u = \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$, ainsi : $\mathbf{e}^u = 1 + \frac{h}{x}$

$$h = x(\mathbf{e}^u - 1)$$

Comme la fonction ln est continue en 1, nous avons :

$$\lim_{h \to 0} \ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

Donc, lorsque h tend vers 0, u tend aussi vers 0. Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{x(\mathrm{e}^u-1)}$$

Or, nous savons que : $$\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^0}{u}=\exp'(0)=1$$

D'où : $$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\frac{1}{x}$$

Exercice : déterminer l'approximation affine de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0.

2.5. Théorème

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Démonstration :

C'est une conséquence immédiate de 2.4.

Remarque : la croissance du logarithme se traduit par :

$\boxed{\ln(x) \leqslant \ln(y) \Leftrightarrow x \leqslant y}$ pour tous x et y de $\mathbb{R}_+^*$

Cette dernière propriété sera très utile pour établir des inégalités ou pour résoudre des inéquations.

2.6. Théorème *Limites aux bornes de l'ensemble de définition]0 ; +∞[*

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(x)=-\infty$$

La représentation graphique de ln admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$ mais n'admet pas d'asymptote horizontale.

Démonstration :

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $A = \mathrm{e}^M$. Ainsi, par croissance de la fonction ln et d'après 2.2. :

$$x \geqslant A \Rightarrow \ln(x) \geqslant \ln(A) \Rightarrow \ln(x) \geqslant M$$

Quelque soit le réel M, il existe un rang A au delà duquel $\ln(x) \geqslant M$.

Ceci prouve bien : $$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$$

Le second résultat en découle simplement par changement de variable :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\ln(x)=\lim_{X\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{X}\right)=-\lim_{X\to+\infty}\ln(X)=-\infty$$

2.7. Théorème *Autres limites faisant intervenir le logarithme népérien*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}x\ln(x)=0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^n\ln(x)=0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$$

Démonstration :

On commence par établir le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, on en déduira les suivants. On propose plusieurs méthodes.

Première méthode en utilisant une limite connue sur l'exponentielle :

On a vu que : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^x}{x} = +\infty$$

D'où, en inversant : $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathbf{e}^x} = 0$$

Posons $X = \mathbf{e}^x$. Lorsque x tend vers $+\infty$, X aussi. La limite ci-dessus s'écrit alors :

$$\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$$

Autre méthode :

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $$\ln(x) < x$$

On peut écrire, pour tout $x > 0$: $$\ln\left(\sqrt{x}\right) < \sqrt{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln(x) < \sqrt{x}$$

Et pour $x > 1$, on a : $$0 < \ln(x) < 2\sqrt{x}$$

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Autre méthode (pour les connaisseurs)

On compare avec une intégrale :

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{x} - 2$$

D'où, pour $x > 1$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

On en déduit, comme simple conséquence, que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Établissons maintenant la limite suivante à l'aide d'un changement de variable du type $X = \dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln(X)}{X}\right) = 0 \text{ d'après ce qui précède.}$$

On en déduit, comme simple conséquence que pour $n \geqslant 2$:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n\ln(x) = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{n-1}\,x\ln(x) = 0 \text{ car } \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{n-1} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$$

Enfin, pour la dernière limite, on peut procéder comme dans la démonstration du théorème 2.4. ou utiliser l'accroissement moyen de la fonction ln en $x_0 = 1$. La limite est donc égale au nombre dérivé de la fonction ln en x_0 soit $\dfrac{1}{x_0}$:

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Notons que cette limite peut s'écrire sous d'autres formes :

$$\lim_{h\to0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ ou } \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$$

2.8. Corollaire

Pour toute fonction polynôme P de degré supérieur ou égal à 1, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{P(x)} = 0$.

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le degré de P. Notons $P(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p x^p$ (avec $a_n \neq 0$)

Comme la limite en $+\infty$ d'une fonction polynôme P est égale à la limite de son terme de plus haut degré, nous avons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{P(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{a_n x^n} = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

Exemples :

- Étudier la limite en $+\infty$ de : $\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

  Aucune limite du théorème 2.7. semble convenir pour une telle limite. Cependant, on sent bien un air de famille avec la limite de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$. L'idée consiste à s'y ramener via l'artifice suivant puis un changement de variable :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$

  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0$ ... (On a juste posé $X = x + 1$ ainsi $X \to +\infty$)

  D'où, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$

- Étudier la limite en $+\infty$ de : $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

  En remarquant que $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, nous avons : $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \dfrac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

  En posant $X = \sqrt{x}$ ($X \to +\infty$), nous obtenons :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln(X)}{X} = 0$$

  Par un raisonnement analogue, montrer que : $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x) = 0$

- Étudier la limite en 0, à droite, de : $\ln(x) \times \ln(1-x)$

  Nous sommes en présence d'une forme indéterminée du type "$-\infty \times 0$". L'idée est d'écrire :

$$\ln(x) \times \ln(1-x) = x\ln(x) \times \frac{\ln(1-x)}{x}$$

  Nous savons, d'une part que : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$

  D'autre part, en posant $h = -x$: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{\substack{h\to0\\h<0}} -\dfrac{\ln(1+h)}{h} = -1$

  D'où, par produit : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln(x) \times \ln(1-x) = 0$

3. Fonctions exponentielles de base *a* (*a* > 0)

3.1. Définition

Soit a un réel strictement positif.

On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f_a (notée parfois $\exp_a$) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \mathbf{e}^{x\ln(a)}$$

On remarque que, pour $x \in \mathbb{Z}$, on a : $f_a(x) = a^x$

En effet, cela découle du corollaire 2.2. dans lequel on a vu que pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(A^p) = p\ln(A)$$

Lorsque $x \in \mathbb{Z}$, on a donc bien : $f_a(x) = \mathbf{e}^{x\ln(a)} = \mathbf{e}^{\ln(a^x)} = a^x$

On notera donc, **par convention** : $a^x = \mathbf{e}^{x\ln(a)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ce n'est pas une convention ridicule, on verra ci-dessous que cette nouvelle écriture est compatible avec les règles usuelles sur les exposants.

On remarquera la nécessité de la condition $a > 0$ pour définir les fonctions f_a et le rôle de la condition $a > 1$ pour le sens de variation de ces fonctions.

Exemples : on considère les fonctions exponentielles f et g de bases 2 et $\frac{1}{2}$ respectivement :

$$f(x) = 2^x = \mathbf{e}^{x\ln(2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \mathbf{e}^{-x\ln(2)}$$

On a :

$f'(x) = \ln(2)\,\mathbf{e}^{x\ln(2)} > 0$ pour tout réel x,

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = -\ln(2)\,\mathbf{e}^{-x\ln(2)} < 0$ pour tout réel x,

donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

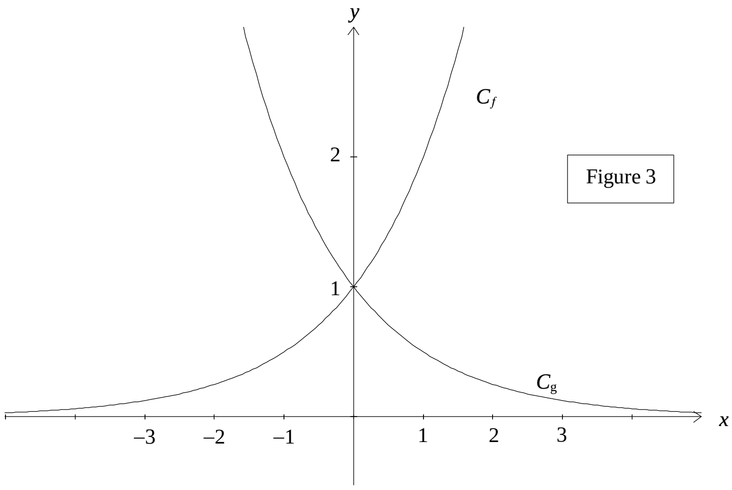

Figure 3

Application : Nous avons vu lors de l'étude du logarithme néperien la relation : $\ln\left(a^p\right) = p\ln(a)$ ($p \in \mathbb{Z}$)

Nous pouvons maintenant étendre cette relation à tout exposant x réel :

$$\ln\left(a^x\right) = \ln\left(\mathbf{e}^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a)$$

3.2. Règles de calculs

Pour tous a et b de $\mathbb{R}_+^*$ et tous x et y de $\mathbb{R}$:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy} \qquad a^x b^x = (ab)^x \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Démonstrations :

- $a^{x+y} = \mathbf{e}^{(x+y)\ln(a)} = \mathbf{e}^{x\ln(a)+y\ln(a)} = \mathbf{e}^{x\ln(a)}\mathbf{e}^{y\ln(a)} = a^x\, a^y$
- $a^{x-y} = \mathbf{e}^{(x-y)\ln(a)} = \mathbf{e}^{x\ln(a)-y\ln(a)} = \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{\mathbf{e}^{y\ln(a)}} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x} = \mathbf{e}^{-x\ln(a)} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^{x\ln(a)}} = \dfrac{1}{a^x}$
- Posons $b = a^x = \mathbf{e}^{x\ln(a)}$. On a : $\left(a^x\right)^y = b^y = \mathbf{e}^{y\ln(b)} = \mathbf{e}^{y\ln(\mathbf{e}^{x\ln(a)})} = \mathbf{e}^{yx\ln(a)} = a^{xy}$
- $a^x\, b^x = \mathbf{e}^{x\ln(a)}\ \mathbf{e}^{x\ln(b)} = \mathbf{e}^{x\ln(a)+x\ln(b)} = \mathbf{e}^{x(\ln(a)+\ln(b))} = \mathbf{e}^{x\ln(ab)} = (ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x} = \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{\mathbf{e}^{x\ln(b)}} = \mathbf{e}^{x\ln(a)-x\ln(b)} = \mathbf{e}^{x(\ln(a)-\ln(b))} = \mathbf{e}^{x\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Conséquence : démonstration de la propriété : $\left(\mathbf{e}^x\right)^y = \mathbf{e}^{xy}$ pour tous réels x et y :

on applique simplement la relation $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ avec $a = \mathbf{e} > 0$.

Énigme : où est l'erreur dans le calcul suivant :

$$-1 = (-1)^1 = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

Réponse : la relation $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$ n'est pas valable pour $a = -1$...

3.3. Théorème

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
- Si $a = 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 1$

Démonstration :

- Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a) = +\infty$ (puisque $\ln(a) > 0$) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\ln(a)} = +\infty$

  De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x\ln(a)} = 0$.
- Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(a) = -\infty$ (puisque $\ln(a) < 0$) d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\ln(a)} = 0$

  De même $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln(a) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{x\ln(a)} = +\infty$.
- Si $a = 1$, le résultat est évident puisque $f_1 = 1$ sur $\mathbb{R}$.

3.4. Théorème

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$
- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{x} = -\infty$

Démonstration :

- Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{x\ln(a)} \ln(a) = +\infty$

(puisque $\ln(a) > 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^X}{X} = +\infty$)

- Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\mathbf{e}^{x\ln(a)}}{x\ln(a)} \ln(a) = -\infty$

(puisque $\ln(a) < 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\mathbf{e}^X}{X} = +\infty$)

Exercice : Soit $a \in \mathbb{R}$. Retrouver simplement le résultat suivant :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathbf{e}^a$$

Cette limite a déjà été établie lors de la démonstration de l'existence de la fonction exponentielle.

Nous avons : $\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \mathbf{e}^{x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)} \underset{X = \frac{a}{x}}{=} \mathbf{e}^{a\frac{\ln(1+X)}{X}}$

Or, lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers 0 et nous savons que $\lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = \ln'(1) = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \lim\limits_{X \to 0} \mathbf{e}^{a\frac{\ln(1+X)}{X}} = \mathbf{e}^a$. Et en particulier : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathbf{e}$.

Exercice : étudier $\lim\limits_{x \to 0} x^x$.

4. Dérivées des fonctions composées du type ln u et e^u

4.1. Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie par $\mathbf{e}^u$ est dérivable sur I et :

$$\left(\mathbf{e}^u\right)' = u' \ \mathbf{e}^u$$

Si, de plus, u est strictement positive sur I, alors la fonction définie par ln u est dérivable sur I et :

$$\ln'(u) = \frac{u'}{u}$$

Démonstration : conséquence du théorème de dérivation d'une fonction composée.

Exemples immédiats :

- Dériver la fonction f suivante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \mathbf{e}^{x^2}$. On obtient : $f'(x) = 2x\,\mathbf{e}^{x^2}$.
- Dériver sur $]0 ; +\infty[$: $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x)$. On obtient : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{1}{x}$.

Deux types de fonctions très utilisées :

$$f_k(x) = \mathbf{e}^{-kx} \text{ et } \quad g_k(x) = \mathbf{e}^{-kx^2} \quad (k \in \mathbb{R}_+^*)$$

Ces fonctions s'étudient sans peine. On les rencontrera dans de nombreux exercices.

Quelques thèmes :

- Étudier la fonction G définie sur $]1\,;+\infty[$ par $G(t) = \ln(\ln(t))$ et la fonction F définie sur $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par $F(t) = \ln(|\ln(t)|)$.
- Étudier la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\ln(x) - \ln(\ln(x))$.
- Étudier les fonctions $x \longmapsto \ln(|x \pm \sqrt{x^2 \pm 1}\,|)$.
- Exemple d'équation transcendante admettant une racine évidente : on considère l'équation (E) : $\ln(x) = \dfrac{\mathbf{e}}{x}$.

  Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(x) - \dfrac{\mathbf{e}}{x}$ est strictement croissante et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.

  En déduire que l'équation (E) admet une unique solution que l'on précisera.

Exercice : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Étudier la limite lorsque t tend vers 0 de : $\dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t}$

On écrit :
$$\frac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t} = \frac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - 1}{t} - \frac{\mathbf{e}^{-\beta t} - 1}{t}$$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathbf{e}^{-\lambda t}$. La fonction f est dérivable et $f'(t) = -\lambda\,\mathbf{e}^{-\lambda t}$.

L'accroissement moyen de f en 0 s'écrit : $\dfrac{f(t) - f(0)}{t} = \dfrac{\mathbf{e}^{-\lambda t} - 1}{t}$. Nous avons donc $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\lambda t} - 1}{t} = f'(0) = -\lambda$.

Ainsi, $\dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t}$ admet une limite en 0 et $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - \mathbf{e}^{-\beta t}}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\mathbf{e}^{-\alpha t} - 1}{t} - \dfrac{\mathbf{e}^{-\beta t} - 1}{t} = -\alpha - (-\beta) = \beta - \alpha$.

5. Fonctions puissances[1]

5.1. Définition

Soit α un réel. On appelle fonction puissance la fonction f_α définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f_\alpha(x) = x^\alpha$$

Dans la pratique, ces fonctions s'étudient sans problèmes en écrivant :
$$x^\alpha = \mathbf{e}^{\alpha \ln(x)}$$

(On notera la nécessité de définir f_α sur $]0\,;+\infty[$)

Exemple : $f_\pi(x) = x^\pi = \mathbf{e}^{\pi \ln(x)}$.

5.2. Théorème

Les fonctions puissances f_α sont dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et :
$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$$

(1) Ces fonctions sont au programme de TS (2002) mais pas leur étude systématique.

Exemple : $f'_\pi(x) = \pi x^{\pi-1}$.

Démonstration : $f_\alpha(x) = \mathbf{e}^{\alpha \ln x}$, d'où $f'_\alpha(x) = \alpha \dfrac{1}{x}\, \mathbf{e}^{\alpha \ln x} = \alpha \dfrac{1}{x}\, x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$

Le signe de α détermine donc le sens de variation des fonctions f_α :

si $\alpha > 0$ alors f_α est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

si $\alpha < 0$ alors f_α est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

Lorsque $\alpha > 0$, nous avons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathbf{e}^{\alpha \ln(x)} = 0$ (puisque $\alpha > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$).

Les fonctions puissances f_α sont donc (pour $\alpha > 0$) prolongeables par continuité en 0.

Nous pouvons donc poser : $f_\alpha(0) = 0$

C'est-à-dire, pour tout réel $\alpha > 0$: $0^{\alpha} = 0$

Cas particulier : lorsque $\alpha = 0$, nous avons :

$$f_0(x) = x^0 = \mathbf{e}^0 = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_0(x) = 1.$$

La fonction f_0 est donc prolongeable par continuité en 0.

Nous pouvons donc poser : $f_0(0) = 1$

C'est-à-dire : $0^0 = 1$

Exercice : étudier l'application f définie $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\mathbf{e}}$. Démontrer que la tangente à sa courbe au point d'abscisse $\mathbf{e}$ coïncide avec celle de l'exponentielle à la même abscisse.

Application des fonctions puissances : racine $n^{\text{ième}}$ ($n \geqslant 2$) : on appelle racine $n^{\text{ième}}$ l'application :

$$R_n :]0\,;+\infty[\;\longrightarrow\;]0\,;+\infty[$$
$$x \longmapsto x^{\frac{1}{n}}$$

> Lorsque n est impair ($n = 2p + 1$), on peut définir la racine $n^{\text{ème}}$ sur $\mathbb{R}$ comme bijection réciproque (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) de l'application $x \longmapsto x^{2p+1}$.

Pour $x > 0$, on note souvent $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ et on a l'équivalence :

$$y = \sqrt[n]{x} \iff (x = y^n \text{ et } y > 0)$$

Remarquons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \mathbf{e}^{\frac{1}{n}\ln(x)} = 0$ (puisque $\dfrac{1}{n} > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$).

La fonction R_n est donc prolongeable par continuité en 0 et nous pouvons poser $R_n(0) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt[n]{0} = 0$.

Représentation graphique des fonctions puissances :

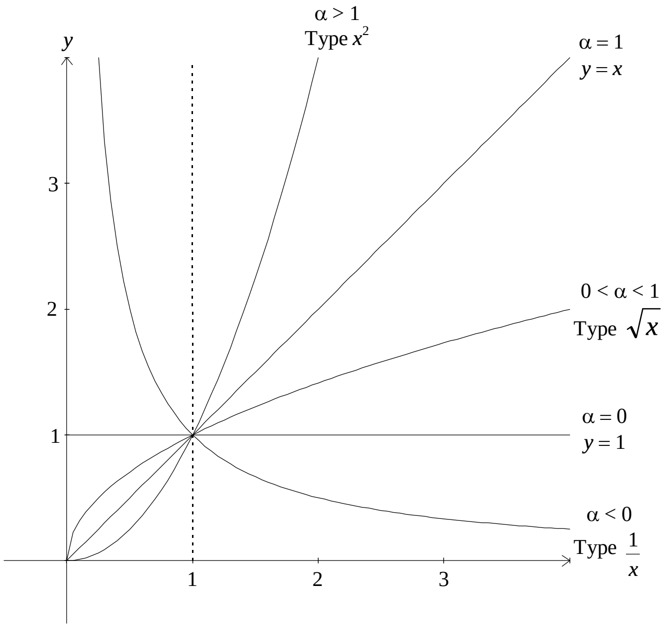

Figure 4

Propriété :

lorsque $x > 1$, les fonctions puissances sont "rangées" dans le même ordre que les exposants :

$$\ldots < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2 < x^3 < x^\pi < x^4 < \ldots$$

lorsque $0 < x < 1$, les fonctions puissances sont "rangées" dans l'ordre inverse des exposants :

$$\ldots < x^4 < x^\pi < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2} < \ldots$$

Cette propriété se démontre aisément : soient α et β deux exposants réels tels que $\alpha < \beta$. Comparons x^α et x^β :

On a $\alpha < \beta$

- Si $x > 1$, alors $\ln(x) > 0$, d'où : $\alpha \ln(x) < \beta \ln(x)$

  Et comme l'exponentielle est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

  $$\mathbf{e}^{\alpha \ln(x)} < \mathbf{e}^{\beta \ln(x)}$$

  C'est-à-dire : $x^\alpha < x^\beta$

- Par contre, si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$, d'où : $\alpha \ln(x) > \beta \ln(x)$

  $$\mathbf{e}^{\alpha \ln(x)} > \mathbf{e}^{\beta \ln(x)}$$

  $$x^\alpha > x^\beta$$

Voyons maintenant comment dériver une expression du type u^α :

5.3. Théorème

Soit α un réel et u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction définie par u^α est dérivable sur I et :

$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$$

Démonstration : $u^{\alpha} = \mathbf{e}^{\alpha \ln u}$, d'où $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha \dfrac{u'}{u}\, \mathbf{e}^{\alpha \ln(u)} = \alpha \dfrac{u'}{u}\, u^{\alpha} = \alpha\, u'\, u^{\alpha-1}$

6. Croissances comparées

6.1. Théorème

Pour tous réels α et β **strictement positifs** et pour tout réel $\boldsymbol{a > 1}$:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$ et en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(a^{x})^{\beta}}{x^{\alpha}} = +\infty$ et en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$

3. $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta} = 0$ et en particulier $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{\alpha}\ln(x) = 0$

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}(a^{-x})^{\beta} = 0$ et en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\mathbf{e}^{-x} = 0$

Ce théorème étant techniquement difficile à retenir, on lui préfère parfois la règle suivante (à formuler avec minutie) :

Pour les produits ou quotients indéterminés ne faisant intervenir que des exponentielles (de base a > 1), des puissances et des logarithmes (ou des puissances d'exposants positifs de ceux-ci) l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances qui elles-mêmes "l'emportent" sur le logarithme...

Ces résultats prolongent ceux déjà établis dans les paragraphes "limites de références" (1.4. et 2.7.)

Démonstration :

1. On écrit : $$\frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = \frac{\mathbf{e}^{\beta\ln(\ln(x))}}{\mathbf{e}^{\alpha\ln(x)}} = \mathbf{e}^{\beta\ln(\ln(x))-\alpha\ln(x)} \underset{X=\ln(x)}{=} \mathbf{e}^{\beta\ln(X)-\alpha X} = \mathbf{e}^{X\left(\beta\frac{\ln(X)}{X}-\alpha\right)}$$

   Or, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \beta\frac{\ln(X)}{X} - \alpha = -\alpha$ (< 0) donc :

$$\lim_{X\to+\infty} X\left(\beta\frac{\ln(X)}{X}-\alpha\right) = -\infty$$

   D'où : $$\lim_{X\to+\infty} \mathbf{e}^{X\left(\beta\frac{\ln(X)}{X}-\alpha\right)} = 0$$

   On en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$ et en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$ (β = 1)

2. On écrit : $$\frac{(a^{x})^{\beta}}{x^{\alpha}} = \frac{\mathbf{e}^{\beta x\ln(a)}}{\mathbf{e}^{\alpha\ln(x)}} = \mathbf{e}^{\beta x\ln(a)-\alpha\ln(x)} = \mathbf{e}^{x\left(\beta\ln(a)-\alpha\frac{\ln(x)}{x}\right)}$$

   Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \beta\ln(a) - \alpha\frac{\ln(x)}{x} = \beta\ln(a) > 0$ (car $a > 1$ et β > 0) donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\left(\beta\ln(a)-\alpha\frac{\ln(x)}{x}\right)} = +\infty$$

   C'est-à-dire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(a^{x})^{\beta}}{x^{\alpha}} = +\infty$ et en particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathbf{e}^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$ ($a = \mathbf{e}$ et β = 1)

3. Par changement de variable : $$x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta} \underset{X=\frac{1}{x}}{=} \frac{(-\ln(X))^{\beta}}{X^{\alpha}}$$

Or, si x tend vers 0 par valeurs supérieurs, X tend vers $+\infty$. On a donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha}(\ln(x))^{\beta} = \lim_{X\to+\infty} \frac{(-\ln(X))^{\beta}}{X^{\alpha}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{(-1)^{\beta}(\ln(X))^{\beta}}{X^{\alpha}} = 0 \text{ d'après 1.}$$

4. On écrit : $$x^{\alpha}(a^{-x})^{\beta} = \mathbf{e}^{\alpha\ln(x)-x\beta\ln(a)} = \mathbf{e}^{x\left(\alpha\frac{\ln(x)}{x}-\beta\ln(a)\right)}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\dfrac{\ln(x)}{x} - \beta\ln(a) = -\beta\ln(a) < 0$ (car $a > 1$ et $\beta > 0$) donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{x\left(\alpha\frac{\ln(x)}{x}-\beta\ln(a)\right)} = 0$$

C'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}(a^{-x})^{\beta} = 0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}\mathbf{e}^{-x} = 0$ ($a = \mathbf{e}$ et $\beta = 1$)

Exemples :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^{\pi}}{\sqrt{x}} = 0$ (cas 1 avec $\beta = \pi$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1000}}{1{,}01^{x}} = 0$ (cas 4 avec $\alpha = 1000$, $a = 1{,}01$ et $\beta = 1$) (imprévisible avec une calculatrice !)

7. D'autres logarithmes

7.1. Définition

Soit a un réel strictement positif différent de 1.

On appelle logarithme de base a la fonction, notée $\log_a$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

La fonction logarithme de base $\mathbf{e}$ est la fonction logarithme népérien.

La fonction logarithme de base 10 appelée "logarithme décimal", qui est souvent utilisée, est notée plus simplement log au lieu de $\log_{10}$.

Ces fonctions portent à juste titre le nom de "logarithmes" car elles vérifient l'équation fonctionnelle :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

En effet, pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\log_a(xy) = \frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$

On en déduit les même règles de calculs que pour le logarithme népérien.

Ces fonctions sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque la fonction ln l'est) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x}$$

7.2. Une application du logarithme décimal

Tout entier naturel n est constitué de $E(\log(n)) + 1$ chiffres

Démonstration :

Soit p le nombres de chiffres de n. Alors :

$$10^{p-1} \leqslant n < 10^p$$

Comme la fonction log est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log(10^{p-1}) \leqslant \log(n) < \log(10^p)$$

Et comme $\log(10^p) = p\log 10 = p$:

$$p - 1 \leqslant \log(n) < p$$

D'où :

$$E(\log(n)) = p - 1$$

$$p = E(\log(n)) + 1$$

Exemple :

Le plus grand nombre dont on ait prouvé la primalité est à ce jour[(1)] :

$$\text{Record} = 2^{32\,582\,657} - 1$$

Déterminons de combien de chiffres il est constitué :

$$\log(\text{Record} + 1) = E\left(\log\left(2^{32\,582\,657}\right)\right) + 1 = E(32\,582\,657 \log 2) + 1 = 9\,808\,358$$

Le plus grand nombre premier connu possède pas loin de 10 millions de chiffres !

8. Complément : fonctions ch et sh

8.1. Définition

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) par :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Ces fonctions s'étudient sans peine et l'on a notamment : $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

(1) 44ème nombre de Mersenne (M44) découvert en septembre 2006 par le GIMPS (voir http://www.mersenne.org/prime.htm pour connaître le dernier record)