Soit la suite (u_n) telle que $u_n = (1{,}2)^n$, pour tout entier naturel n .

Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \ln(u_n)$, pour tout entier naturel n .

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

On sait que si $q > 1$, la suite géométrique (q^n) est divergente, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Comme $q = 1{,}2$, on déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Par ailleurs : $v_n = \ln(u_n) = \ln[(1{,}2)^n] \Rightarrow v_n = n.\ln(1{,}2)$.

Comme $1{,}2 > 1$, on déduit que $\ln(1{,}2) > 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} [n.\ln(1{,}2)] = \ln(1{,}2). \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

b) Qu'en déduire pour la fonction $f : x \to f(x) = \ln(x)$?

Posons $x = (1{,}2)^n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} (1{,}2)^n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} x = +\infty$.

De plus : $\lim\limits_{n \to +\infty} [\ln[(1{,}2)^n] = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.