Déterminer la dérivée de $f : x \to f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

Domaine de définition : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est calculable si et seulement si $\frac{x}{x-1} > 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Donc : $D_f =]-\infty \,;\, 0[\cup]1 \,;\, +\infty[$.

On sait que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} = \dfrac{\frac{1.(x-1)-1.x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = \dfrac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x}$.

On déduit : $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$.

Remarque :

On sait que $\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$, soit $f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$, que l'on dérive plus facilement.

$f(x) = \ln(x) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)-x}{x(x-1)}$, soit $f'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$.

Cependant, il est essentiel de remarquer que le domaine de définition n'est pas le même que sous la première forme.

En effet : $f(x) = \ln(x) - \ln(x-1)$ impose simultanément $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$, soit $x > 1$.

Donc cette méthode n'est utilisable que sur $D =]1 \,;\, +\infty[$.