

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1 - \ln x} \right)$.

Constatons l'indétermination :

On sait $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1 - \ln x} \right)$ est une forme indéterminée de forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Procédons comme pour $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{X-1}$, en factorisant X au numérateur et au dénominateur.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1 - \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(\ln x) \left(\frac{1}{\ln x} - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\ln x} - 1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0^+$, on déduit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1 - \ln x} \right) = \frac{1}{-1} = -1$.