Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Constatons l'indétermination :

On sait $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ est une forme indéterminée de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = +\infty$.

Posons $X = \sqrt{x}$, soit $x = X^2$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln [(\sqrt{x})^2]}{\sqrt{x}} = \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln (X^2)}{X} = 2 \lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = +\infty .$$

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Remarque :

On peut plus aisément montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$.

En effet : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\right)\left(\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$.

Le graphique ci-dessous permet de vérifier que si la croissance de x^2 *vers* $+\infty$, *beaucoup plus rapide que celle de* x, *donc de* $\ln x$ *vers* $+\infty$, *justifie que la démonstration précédente soit aisée, le fait que la croissance de* $\sqrt{x}$ *soit également beaucoup plus rapide que celle de* $\ln x$, *semble bien moins évidente, d'où une démonstration plus élaborée.*