Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} x.(\ln x)^2$.

Constatons l'indétermination :

On sait $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x.(\ln x)^2$ est une forme indéterminée de forme $0 \times \infty$.

Ramenons l'expression à une forme $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0^-$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x.(\ln x)^2 = \lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}.\ln x)^2 = [\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}.\ln x)\ ]^2$.

Changement de variable : $X = \sqrt{x}$, soit $x = X^2$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} X = 0^+$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x.(\ln x)^2 = [\lim\limits_{x \to 0^+} (\sqrt{x}.\ln x)\ ]^2 = [\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln (X^2)\ ]^2$ où $\ln (X^2) = 2.\ln X$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x.(\ln x)^2 = [\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln (X^2)\ ]^2 = 4[\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X\ ]^2 = 0$, puisque $\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X = 0$.