Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Constatons l'indétermination :

On sait $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0^+ \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty \end{cases}$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = +\infty$.

Le produit $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est de forme indéterminée $0 \times \infty$.

Ramenons l'expression à une forme $\lim\limits_{x \to 0^+} x.\ln x = 0^-$.

On pose $X = \dfrac{x-1}{x}$, avec $\lim\limits_{x \to 1^+} X = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x} = 0^+$. On constate que $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{X}$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ devient $\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln\dfrac{1}{X} = -\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X$, puisque $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$.

Sachant $\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X = 0^+$, on déduit $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 0^-$.

Autre présentation :

Sachant $\ln\dfrac{a}{b} = (\ln a) - (\ln b)$:

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \left(\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln x\right) - \left(\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln(x-1)\right)$,

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \left(\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln x\right) - \left(\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x}\right) . [\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1).\ln(x-1)\ ]$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = \ln(1) = 0$, on déduit $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln x = 0$.

De même : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$.

On déduit : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1).\ln(x-1)$.

Posons $X = x - 1$, d'où $\lim\limits_{x \to 1^+} X = 0^+$.

D'où : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{x}.\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X = 0^-$, puisque $\lim\limits_{X \to 0^+} X.\ln X = 0^+$.