Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ **.**

Il faut tout d'abord constater l'indétermination.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+2}{x} = 1$, donc, par continuité : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ indéterminé, de forme $0 \times \infty$.

Posons $h = \dfrac{2}{x}$, d'où $x = \dfrac{2}{h}$ et $h \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} x.\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x.\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{2}{h}\ln(1+h) = 2 \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \ .$$

On sait : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

On conclue : $\lim\limits_{x \to +\infty} x.\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) = 2$.