Calculer $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ **.**

Il faut tout d'abord constater l'indétermination.

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \ln(1+x^2) = \ln 1 = 0$; $\displaystyle \lim_{x\to 0} (2x) = 0$, donc $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$ est indéterminée, de forme $\dfrac{0}{0}$.

Pour déterminer celle des indéterminations connues dont il faut se rapprocher, il suffit en général de remplacer la valeur limite donnée à x *dans le logarithme.*

Ainsi, si on utilise $\ln A$: $\left\{\begin{array}{l} \text{Si } A \to +\infty \text{, se rapprocher de } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = +\infty \\ \text{Si } A \to 0 \text{, se rapprocher de } \displaystyle\lim_{x\to 0^+} x.\ln x = 0^+ \\ \text{Si } A \to 1 \text{, se rapprocher de } \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1 \end{array}\right.$.

En remplaçant $x = 0$: $\ln(1+x^2) = \ln 1$, donc on se rapproche de $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{2}$, avec $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$.

Par ailleurs : Posons $h = x^2$, soit $\displaystyle \lim_{x\to 0} h = 0$.

$\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ devient $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ (On rappelle que $\displaystyle \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$).

En conclusion : $\displaystyle \frac{\ln(1+x^2)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \times \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 1 \times 0 = 0$.