

Résoudre dans \mathbb{R} : $3x^4 - x^2 - 4 = 0$.

Ce trinôme du 4^{ème} degré ne comporte que des degrés pairs.

Pour le ramener à un trinôme du 2nd degré, on effectue un *changement de variable* : $X = x^2$.

L'équation devient : $3X^2 - X - 4 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-4) = +49 > 0.$$

$$\text{Deux racines réelles} \begin{cases} X' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{6} = -1 \\ X'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{6} = +\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Il faut revenir à la variable initiale x :

$X = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (équation impossible).

$$X = +\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 = +\frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = +\sqrt{\frac{4}{3}} = +\frac{2}{\sqrt{3}} = +\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

Conclusion : $S = \left\{ -\frac{2\sqrt{3}}{3}; +\frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$.