

Résoudre dans $\mathbf{R}$: $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x-2}$.

Ecrivons plutôt $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1}$, pour que les deux membres soient positifs.

Conditions d'existence : il faut simultanément $x+1 \geq 0$, $2x-1 \geq 0$, $x-2 \geq 0$, ce qui impose $x \geq 2$.

Le domaine d'existence est $D = [2 ; +\infty[$.

Mise au carré: $(x-2) + 2\sqrt{(x-2)(2x-1)} + (2x-1) = x+1$.

On isole la racine, pour qu'une nouvelle mise au carré ne produise pas de nouvelle racine.

$$2\sqrt{(x-2)(2x-1)} = -2x+4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(2x-1)} = -x+2$$
 .

Cette nouvelle équation impose $-x+2 \geq 0$, soit $x \leq 2$, puisque $-x+2$ est le résultat d'une racine.

Le nouveau domaine d'existence impose $x \leq 2$ et $x \geq 2$, donc $D = \{2\}$.

En fait, soit $x = 2$ est solution, soit il n'y a pas de solution.

Continuons cependant la méthode normale : Nouvelle mise au carré :

$$\sqrt{(x-2)(2x-1)} = -x+2 \Rightarrow (x-2)(2x-1) = (-x+2)^2, \text{ soit } 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 .$$

$$\text{D'où : } x^2 - x - 2 = 0 .$$

$$\text{Comme } a - b + c = 1 - (-1) + (-2) = 0, \text{ les solutions sont } \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = \frac{c}{a} = +2 \end{cases} .$$

Au vu du domaine d'existence, seule $x' = 2$ est recevable : $S = \{2\}$.