Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$: *Démarche différente pour chaque exercice.*

a) $\sqrt{2x+3} \leq x+1$.

Conditions d'existence :

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$.

$x + 1 \geq 0$, car le résultat d'une racine doit être positif ou nul, ce qui impose $x \geq -1$.

Domaine de définition : $D =]-1 ; +\infty[$.

Elevons au carré, ce qui respecte l'ordre des quantités positives :

$0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$

$2x + 3 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x + 3 \leq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 2$.

On sait que : $A^2 \leq B^2 \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.

Les carrés respectent l'ordre des _tailles_ des nombres (valeur absolue).

D'où : $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$, soit $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq +\sqrt{2}$. Seul $x = +\sqrt{2}$ vérifie la condition $x \geq -1$.

$S = [\sqrt{2} ; +\infty[$.

b) $x + 2 < \sqrt{4x+13}$.

Conditions d'existence : $4x + 13 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{4}$.

Remarque : Il n'y a pas de condition à imposer à $x + 2$ qui doit être inférieur à une racine, donc peut être de signe positif ou négatif.

Cette remarque ne simplifie pas la résolution, car, si la mise au carré conserve l'ordre de nombre positifs, elle a un comportement moins prévisible si l'un des nombres peut être négatif.

Envisageons deux cas :

1) Si $x < -2$

$x + 2 < 0$, est nécessairement inférieur à $\sqrt{4x+13}$, qui est positif.

Au vu des conditions d'existence, tout $x < -2$ est solution.

D'où une première zone solution : $S_1 = [-\frac{13}{4} ; -2[$.

2) Si $x \geq -2$

$x + 2 \geq 0$, d'où : $0 \leq x + 2 < \sqrt{4x+13}$, termes tous positifs.

Leur mise au carré conserve les ordres :

$(x+2)^2 < 4x + 13 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 < 4x + 13 \Leftrightarrow x^2 < 9$.

$x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < +3$.

Ce 2ème cas impose $x \geq -2$, d'où une seconde zone solution : $S_2 = [-2 ; +3]$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 = [-\frac{13}{4} ; +3]$.