Soit un quadrilatère convexe (*ABCD*) . Soit *I* milieu de [*AD*] et *J* milieu de [*BC*].

a) Décomposer vectoriellement les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{DC}$ en passant par *I* et *J*.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}) = 2\,\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}) + (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC})$.

$$\begin{cases} I \text{ milieu de } [AD] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \\ J \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \end{cases} .$$

On déduit : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.