Soient a et b les racines de $x^2 - 3x - 8 = 0$.

Sans calculer ces racines, déterminer la valeur de $E = \dfrac{b}{a^2} + \dfrac{a}{b^2}$.

Il est vivement déconseillé de calculer l'expression proposée en remplaçant a et b par les racines de l'équation, qui sont $\dfrac{-1 + \sqrt{57}}{4}$ et $\dfrac{-1 - \sqrt{57}}{4}$, ce qui entraînerait des calculs assez désagréables.

On remarque que l'équation admet bien des racines ($\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ de signes opposés) et que dans l'expression proposée, $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont <u>permutables</u> (<u>Equation symétrique</u> en a et b).

On peut l'écrire avec S et P .

Il suffit ensuite de remplacer $S = -\dfrac{b}{a} = +3$ et $P = \dfrac{c}{a} = -8$.

$$E = \frac{b}{a^2} + \frac{a}{b^2} = \frac{b^3 + a^3}{a^2b^2} = \frac{a^3 + b^3}{a^2b^2} = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2b^2} = \frac{(a + b)[(a^2 + 2ab + b^2) - 3ab]}{a^2b^2} = \frac{(a + b)[(a + b)^2 - 3ab]}{a^2b^2} ,$$

$$E = \frac{S(S^2 - 3P)}{P^2} = \frac{S^3 - 3PS}{P^2} = \frac{3^3 - 3(-8)(3)}{(-8)^2} = \frac{27 + 72}{64} = +\frac{99}{64} .$$