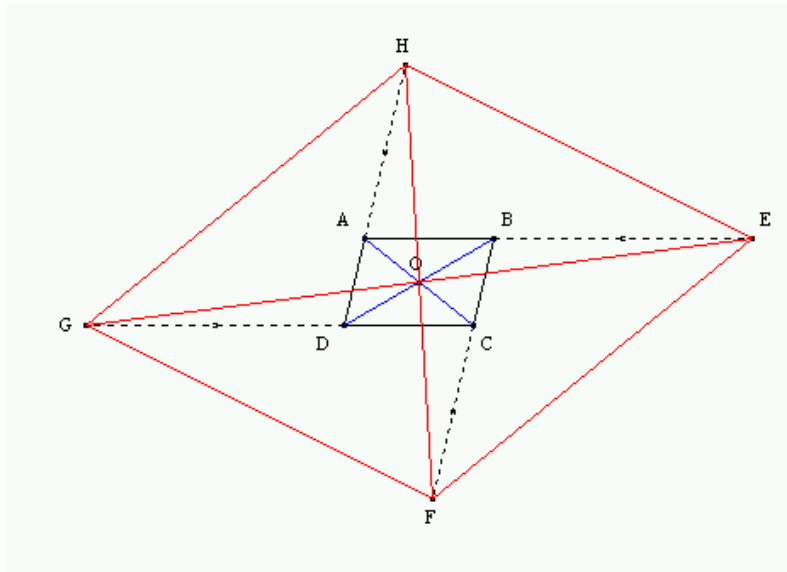


Soit un parallélogramme  $(ABCD)$  et les points  $(E, F, G, H)$  tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG} = 3\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{DA}.$$

1/ Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{EF}$  en fonction des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .



Sachant  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$  :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}.$$

2/ En déduire que le quadrilatère  $(EFGH)$  est un parallélogramme.

Il suffit de montrer que  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ .

Par une démonstration similaire à celle du 1/, on obtient :

$$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CG} - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH}) = 3\overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DA}) = 2\overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{HG} = -2\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB},$$

soit  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ .

**Préciser son centre.**

Comme  $(EFGH)$  est un parallélogramme, il suffit de déterminer le milieu de l'une de ses diagonales, qui est le centre du parallélogramme.

D'après la figure, on peut prévoir que les deux parallélogrammes ont même centre,  $O$  le milieu de  $[AC]$ .

Vérifions que  $O$  est également milieu de  $[EG]$  :

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OE}, \text{ ce qui prouve que } O \text{ est milieu de } [EG].$$