Déterminer tous les couples $(x\ ;\ y)$ de nombres réels qui vérifient simultanément les équations :

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ e^x = \dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases} .$$

Conditions d'existence : $\ln A$ calculable $\Leftrightarrow$ $A > 0$, ce qui impose $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

On utilise $\ln(A) + \ln(B) = \ln(AB)$ et $e^{-A} = \dfrac{1}{e^A}$.

Par ailleurs, les fonctions *logarithme* et *exponentielle* sont *injectives* , soit $\begin{cases} \ln A = \ln B \Leftrightarrow A = B \\ e^A = e^B \Leftrightarrow A = B \end{cases}$.

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln 6 \\ e^x = \dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2y^2) = \ln(6^2) \\ e^x = e^{-1-y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = 36 \\ x = -1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 6 \text{ ou } xy = -6 \\ x + y = -1 \end{cases} .$$

Deux nombres, de somme S et de produit P sont les racines de $X^2 - SX + P = 0$.

<u>1er cas : $x + y = -1$ et $xy = 6$</u>

x , y sont les racines de $X^2 + X + 6 = 0$, or $\Delta = b^2 - 4ac = -23 < 0$. L'équation n'a pas de solutions.

<u>2ème cas : $x + y = -1$ et $xy = -6$</u>

x , y sont les racines de $X^2 + X - 6 = 0$, or $\Delta = b^2 - 4ac = 25 \Rightarrow \begin{cases} X' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = +2 \\ X'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -3 \end{cases}$.

Il existe donc deux couples solutions : $(x\ ;\ y) = (+2\ ;\ -3)$ et $(x\ ;\ y) = (-3\ ;\ +2)$.