a) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{2-\sqrt{x+3}}$ **.**

Pour $x = 1$, l'expression devient $\dfrac{0}{0}$, forme indéterminée.

Utilisons la quantité conjuguée de $2-\sqrt{x+3}$, afin de faire apparaître un polynôme simplifiable :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)} = -\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2-\sqrt{x+3}} = -\lim_{x \to 1} (2+\sqrt{x+3}) = 2+2 = 4 .$$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1})$ **.**

On constate que l'expression est de forme indéterminée $\infty - \infty$. On utilise la quantité conjuguée.

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)-(2x+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}} .$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}) = -\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{2+\frac{1}{x}}} .$$

Le dénominateur tend vers $1+\sqrt{2}$, alors que le dénominateur devient infini.

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+1}) = -\infty .$$