Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$.

Démontrer par récurrence que $f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$. ($f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f)

Soit la relation de récurrence $P_n \mid f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) <u>*Initialisation*</u> : <u>Vérifions P_1 vraie :</u>

$f^{(1)}(x) = f'(x) = u'v - v'u = -2e^{2x} + (1 - 2x)(2e^{2x}) = 2[-1 + (1 - 2x)e^{2x}] = -4xe^{2x} = 2^1(1 - 1 - 2x)e^{2x}$.

On constate que P_1 est vérifiée.

b) <u>*Hérédité*</u> : <u>Supposons P_n vraie. Peut-on en déduire P_{n+1} vraie :</u>

$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}]'(x) = [2^n(1 - n - 2x)e^{2x}]' = 2^n[(1 - n - 2x)e^{2x}]' = 2^n(u'v + v'u) = 2^n[-2e^{2x} + 2(1 - n - 2x)e^{2x}]$,

$f^{(n+1)}(x) = 2^n(-2n - 2xe^{2x}) = 2^{n+1}[1 - (n + 1) - 2x]e^{2x}$.

On constate bien que P_{n+1} est vérifiée dès que P_n l'est.

c) <u>*Conclusion*</u> : <u>P_n vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.</u>