

Résoudre dans \mathbb{R} : $\frac{4x}{x+1} > x^2 - 2x + 3$.

Remarque : $x^2 - 2x + 3 = 0$ n'admet pas de solution, car $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$.

Il ne faut ni faire le *produit en croix*, ni supprimer le dénominateur $x + 1$, car on ne connaît pas son signe, variable selon x , or, dans une inéquation cela impliquerait des changements de sens de celle-ci.

On regroupe l'ensemble d'un même côté, puis on met au même dénominateur :

$$\frac{4x}{x+1} > x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - \frac{4x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x + 3)(x+1) - 4x}{x+1} < 0.$$

Sans factorisation évidente du dénominateur, on le développe, ce qui donne, après réduction :

$$\frac{x^3 - x^2 - 3x + 3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1) - 3(x-1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 3)(x-1)}{x+1} < 0.$$

Les racines du numérateur sont $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 1 et celle du dénominateur -1.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		+1		$+\sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 3$	+	0	-		-		-	0	+
$x - 1$	-		-		-	0	+		+
$x + 1$	-		-	0	+		+		+
$R(x)$	+	0	-	 	+	0	-	0	+

On constate que $S =]-\sqrt{3}; -1[\cup]+1; +\sqrt{3}[$.