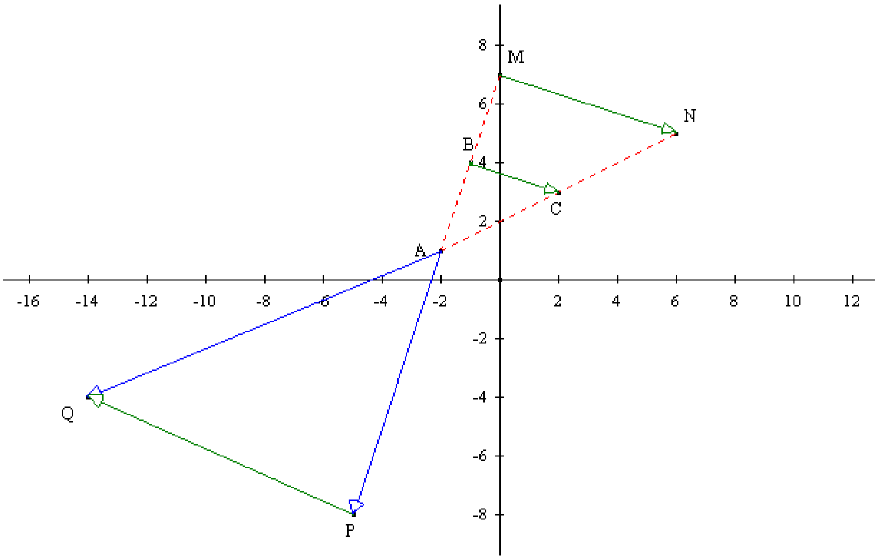
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ placer les points $A(-2 ; 1)$, $B(-1 ; 4)$, $C(2 ; 3)$.

1/ Soit M le symétrique de A par rapport à B, et N le symétrique de A par rapport à C.



Calculer les coordonnées des points M et N.

M symétrique de A par rapport à $B \Leftrightarrow B$ milieu de $[AM] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$.

$\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M - (-2) \\ y_M - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M + 2 = 2 \\ y_M - 1 = 6 \end{cases}$.

d'où $x_M = 0$ et $y_M = 7$, soit $M(0 ; 7)$.

N symétrique de A par rapport à $C \Leftrightarrow C$ milieu de $[AN] \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC}$.

$\begin{pmatrix} x_N - x_A \\ y_N - y_A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_N - (-2) \\ y_N - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_N + 2 \\ y_N - 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N + 2 = 8 \\ y_N - 1 = 4 \end{cases}$.

d'où $x_N = 6$ et $y_N = 5$, soit $N(6 ; 5)$.

Le théorème de la *droite des milieux* permet d'affirmer $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BC}$.

2/ Soit P et Q les points définis par $\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AC}$.

a) Calculer les coordonnées de P et Q.

$\overrightarrow{AP} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - (-2) \\ y_P - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -1 - (-2) \\ 4 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P + 2 \\ y_P - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_P + 2 = -3 \Leftrightarrow x_P = -5 \\ y_P - 1 = -9 \Leftrightarrow y_P = -8 \end{cases}$, d'où $P(-5 ; -8)$.

$\overrightarrow{AQ} = -3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q - x_A \\ y_Q - y_A \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q - (-2) \\ y_Q - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 2 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_Q + 2 \\ y_Q - 1 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x_Q + 2 = -12 \Leftrightarrow x_Q = -14 \\ y_Q - 1 = -6 \Leftrightarrow y_Q = -5 \end{cases}$, d'où $Q(-14 ; -5)$.

On peut remarquer que $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que (*MN*) et (*PQ*) sont deux droites parallèles.

Nos deux remarques précédentes, $\overrightarrow{PQ} = -3\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{BC}$ permettent d'affirmer $\overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{MN}$.

Deux vecteurs multiples sont *colinéaires* . Ils définissent une direction unique, ce qui prouve (*MN*) // (*PQ*) .

Vérifions par le calcul :

$\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 6\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$.

Pour aller de M à N , on avance de 6 , en descendant de 2 .

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14-(-5) \\ -5-(-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} = -9\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} = -\frac{3}{2}(6\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}) = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{MN}$.