Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = a + \dfrac{1}{(x-b)^2}$, pour tout x réel.

Déterminer a et b réels tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.

Un rapport de polynômes se comporte aux infinis comme le rapport de ses plus hauts degrés :

En conséquence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-b)^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[a + \dfrac{1}{(x-b)^2} \right] = a + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x-b)^2} = a$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$, on déduit $a = 4$, soit $f(x) = 4 + \dfrac{1}{(x-b)^2}$.

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale $D \mid y = 4$ lorsque $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$ impose que $\dfrac{1}{(x-b)^2}$ devienne infini lorsque x se rapproche, jusqu'à se confondre, avec 2 .

Sachant $\lim\limits_{A \to 0} \dfrac{1}{A} = \infty$ et $\lim\limits_{A \to \infty} \dfrac{1}{A} = 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-b)^2} = +\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to 2} (x-b) = 0$.

D'où : $b = 2$.

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale $D' \mid x = 2$.

La fonction cherchée est : $f(x) = 4 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Graphe de f :