On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ et $f(-1) = 0$.

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Le seul nombre réel pour lequel $f(x)$ pourrait ne pas être définie est $x = -1$.

Comme l'énoncé impose $f(-1) = 0$, la fonction f est définie en tout $x \in \mathbb{R}$.

<u>*Continuité de*</u> f :

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ est la composée de $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, fonction continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et de $h(x) = e^x$, continue sur $\mathbb{R}$.

$f = h \circ g$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Etudions de plus près la continuité en $x = -1$:

$\lim\limits_{h \to 0^+} f(-1-h) = \lim\limits_{h \to 0^+} e^{\frac{(-1-h)-1}{(-1-h)+1}} = \lim\limits_{h \to 0^+} e^{\frac{2+h}{h}} = +\infty$, puisque $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{2+h}{h} = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$.

$\lim\limits_{h \to 0^+} f(-1+h) = \lim\limits_{h \to 0^+} e^{\frac{(-1+h)-1}{(-1+h)+1}} = \lim\limits_{h \to 0^+} e^{\frac{-2+h}{h}} = 0$, puisque $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-2+h}{h} = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.

Conclusion :

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$: La fonction f est discontinue à gauche en $x = -1$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$: La fonction f est continue à droite en $x = -1$.

<u>*Dérivabilité de*</u> f :

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ est composée de $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, fonction dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et de $h(x) = e^x$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f = h \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

f ne peut être dérivable à gauche en $x = -1$, puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.

$f'_d(-1) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} e^{\frac{-2+h}{h}}$, forme indéterminée de forme $\infty \times 0$.

$f'_d(-1) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} e^{1-\frac{2}{h}} = e. \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1}{h} e^{-\frac{2}{h}}$. Posons $X = \dfrac{1}{h}$, d'où : $X \to +\infty$.

$f'_d(-1) = e \lim\limits_{X \to +\infty} (X.e^{-2X}) = 0$, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

A droite, en $x = -1$, la pente de la tangente est nulle (f n'est cependant pas dérivable en $x = -1$, puisqu'elle n'y est dérivable que d'un côté).

2/ Terminer l'étude et tracer sa courbe représentative dans un repère d'unité 1 cm .

<u>*Limites aux bornes*</u> :

On a vu $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$. Le graphe admet une asymptote verticale $x = -1$ (à gauche de $x = -1$)

Par contre $f(-1) = 0$ et $f'_d(-1) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$, on déduit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} = e^1 = e$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = e$. Le graphe admet une asymptote horizontale $y = e$.

Dérivée :

$f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$.

$f'(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)' e^{\frac{x-1}{x+1}} = \dfrac{2}{(x+1)^2}\, e^{\frac{x-1}{x+1}} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. La fonction est partout croissante.

Graphe :