Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on donne les points : $A(1 ; 4)$, $B(-1 ; -1)$, $C(5 ; 1)$, $D(7 ; 6)$ et $E(-4 ; 6)$.

1/ Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A) = (-1 - 1 ; -1 - 4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2 ; -5)$.

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D ; y_C - y_D) = (5 - 7 ; 1 - 6) \Rightarrow \overrightarrow{DC}(-2 ; -5)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, ayant deux côtés opposés simultanément parallèles et égaux.

2/ Calculer les longueurs EA , EB et AB . Que peut-on en déduire pour le triangle EAB ?

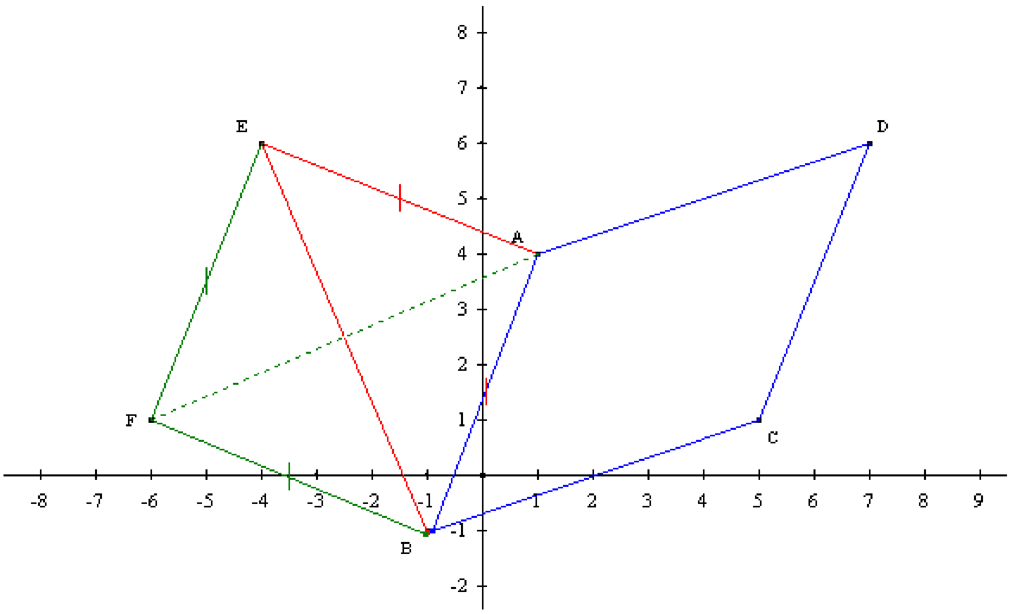
$EA = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{[1 - (-4)]^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$.

$EB = \sqrt{(x_B - x_E)^2 + (y_B - y_E)^2} = \sqrt{[-1 - (-4)]^2 + (-1 - 6)^2} = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[-1 - 1]^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$.

On constate que $EA = AB$. Le triangle EAB est isocèle, de sommet A .

$EA^2 + AB^2 = EB^2$. Le théorème de Pythagore prouve que le triangle EAB est *rectangle isocèle* , de sommet A .



3/ Déterminer par le calcul les coordonnées du point F tel que $BAEF$ soit un parallélogramme.

Pour que le quadrilatère $BAEF$ soit un parallélogramme, il faut et il suffit que deux de ses côtés opposés soient parallèles et égaux, donc des vecteurs égaux.

Imposons : $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, soit $(x_F - x_E ; y_F - y_E) = (x_B - x_A ; y_B - y_A) \Leftrightarrow (x_F - (-4) ; y_F - 6) = (-2 ; -5)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_F + 4 = -2 \Leftrightarrow x_F = -2 - 4 = -6 \\ y_F - 6 = -5 \Leftrightarrow y_F = 6 - 5 = +1 \end{array} \right\} \Rightarrow F(-6 ; 1) .$$

4/ Démontrer que $BAEF$ est un carré.

Le parallélogramme $BAEF$ possède un angle droit en A , donc est un rectangle.

Par ailleurs, deux de ses côtés consécutifs sont égaux, $EA = AB$, donc c'est un losange.

Possédant ces deux propriétés, le parallélogramme $BAEF$ est un carré.

5/ Les points F , A et D sont-ils alignés ?

Il faudrait que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient colinéaires, soit : $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AD}$, avec k réel.

$\overrightarrow{AF}(x_F - x_A\ ;\ y_F - y_A) = (-6 - 1\ ;\ 1 - 4) \Rightarrow \overrightarrow{AF}(-7\ ;\ -3)$.

$\overrightarrow{AD}(x_D - x_A\ ;\ y_D - y_A) = (7 - 1\ ;\ 6 - 4) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(6\ ;\ 2)$.

Pour être colinéaires, ces vecteurs doivent vérifier $\frac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$ (même coefficient directeur) .

$\frac{y_F - y_A}{x_F - x_A} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$ tandis que $\frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ces rapports n'étant pas égaux, on conclue que les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc que les points F , A , D ne sont pas alignés.