Soit $f : x \to f(x) = \dfrac{2x^3 + 5}{-x^2 - 2x + 15}$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition de f .

$f(x)$ est calculable pour tout x réel tel que $-x^2 - 2x + 15 \neq 0$.

Soit : $-x^2 - 2x + 15 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-1)(15) = 4 + 64 = 64 = 8^2 \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-8}{-2} = +3 \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+8}{-2} = -5 \end{cases} .$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-5 ; +3\}$.

2/ Déterminer ses limites autour des valeurs hors domaine (valeurs interdites).

<u>- Comportement de</u> $f(x)$ <u>autour de $x = -5$:</u>

On va détailler ce premier calcul, puis plus synthétiser les suivants.

On ne peut poser $x = -5$, puisque $f(-5)$ n'est pas calculable. Il faut donc *approcher* $x = -5$, de part et d'autre de cette abscisse.

Soit $x \to -5^-$ ($x \to -5$; $x < -5$) . On dit aussi "tendre vers -5 par valeurs inférieures".

a) <u>Comportement du numérateur $N(x) = 2x^3 + 5$.</u>

Cette expression est définie en $x = -5$ et comme tout polynôme est *continue* en cette valeur.

Donc, inutile de lui faire une limite : $\lim\limits_{x \to -5} N(x) = N(-5)$ par *continuité* .

$\lim\limits_{x \to -5} (2x^3 + 5) = -245$.

On remarquera qu'il est inutile de préciser sur ce terme si la limite est faite par valeurs inférieures ou supérieures, -5^- ou -5^+ , car de toutes façons le résultat est largement négatif.

b) <u>Comportement du dénominateur $D(x) = -x^2 - 2x + 15$:</u>

Cette expression est définie en $x = -5$ et comme tout polynôme est *continue* en cette valeur.

Donc, inutile de lui faire une limite : $\lim\limits_{x \to -5} D(x) = D(-5)$ par *continuité* .

$\lim\limits_{x \to -5} (-x^2 - 2x + 15) = 0$, comme vu dans le domaine (c'est même pourquoi $x= -5$ n'appartient pas au domaine, il annule le dénominateur).

Il est par contre indispensable de préciser si on se rapproche de 0 par valeurs positives ou négatives.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$-x^2 - 2x + 15$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to -5^-} (-x^2 - 2x + 15) = 0^-$ (légèrement négatif à gauche de –5).

En conséquence : $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -5} (2x^3 + 5) = -245 \\ \lim\limits_{x \to -5^-} (-x^2 - 2x + 15) = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = +\infty$.

De même, toujours en consultant le tableau de signes ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -5}(2x^3+5) = -245 \\ \lim\limits_{x \to -5^+}(-x^2-2x+15) = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = -\infty .$$

La courbe représentative (C) présente une asymptote verticale $x = -5$.

De même :

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3}(2x^3+5) = 59 \\ \lim\limits_{x \to 3^-}(-x^2-2x+15) = 0^+\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$ (consulter le tableau de signes pour le dénominateur).

$$\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3}(2x^3+5) = 59 \\ \lim\limits_{x \to 3^+}(-x^2-2x+15) = 0^-\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty .$$

La courbe représentative (C) présente une asymptote verticale $x = +3$.

3/ Déterminer ses limites aux infinis.

Un rapport de polynômes se comporte aux *infinis* comme le rapport de ses plus hauts degrés.

$$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty .$$

Utilisons l'autre présentation pour $+\infty$, plus compliquée mais plus rigoureuse :

On factorise le plus petit des plus hauts degrés du numérateur (x^2) et du dénominateur (x^3) , soit x^2 .

Comme on force cette factorisation, il faut compenser par des divisions sur les termes de degrés inférieurs :

$$f(x) = \frac{x^2\left(2x + \frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(-1 - \frac{2}{x} + \frac{15}{x^2}\right)} = \frac{2x + \frac{5}{x^2}}{-1 - \frac{2}{x} + \frac{15}{x^2}} .$$

Les termes en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 lorsque x devient infini, donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$.

Il est certain que la première méthode est beaucoup plus rapide, puisque se limitant à :

$$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty .$$

On sait donc que lorsque x devient infini, la fonction prend des ordonnées $y = f(x)$ qui deviennent elles-mêmes infinies.

Il faut préciser si ce seront des *branches* très rapides, comme les x^3 ou x^2 , moyennement rapides, comme les x (asymptotes obliques $y = ax + b$) , ou lentes, bien qu'infinies, comme les $\sqrt{x}$.

C'est l'objet de la dernière question.

4/ Vérifier que la courbe représentative de *f* admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x + 4$.

Si aux infinis, la courbe (C) vient se *coller* sur la droite $y = -2x + 4$, qui devient son *asymptote oblique* , c'est que l'*écart* entre ces deux courbes devient nul.

On étudie *l'écart algébrique* entre $y = f(x)$ et $y = -2x + 4$: $E(x) = f(x) - (-2x + 4)$.

$$E(x) = f(x) - (-2x+4) = f(x) + 2x - 4 = \frac{2x^3+5}{-x^2-2x+15} + 2x - 4 = \frac{(2x^3+5) + (2x-4)(-x^2-2x+15)}{-x^2-2x+15} ,$$

$$E(x) = \frac{2x^3 + 5 - 2x^3 - 4x^2 + 30x + 4x^2 + 8x - 60}{-x^2-2x+15} \text{, soit : } E(x) = \frac{38x-55}{-x^2-2x+15} .$$

En faisant le rapport des plus hauts degrés :

$\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [\ f(x) - (-2x + 4)\ ] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{38}{x} \right) = 0^+$. *L'écart devient nul, mais* $f(x)$ *est au-dessus.*

$\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\ f(x) - (-2x + 4)\ ] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{38}{x} \right) = 0^-$. *L'écart devient nul, mais* $f(x)$ *est au-dessous.*

La courbe (C) admet bien $y = -2x + 4$ comme *asymptote oblique* .

Graphe : (Vérifier graphiquement le domaine et les limites trouvées)