**On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telles que :**

$$\begin{cases} u_0 = 3 \quad \text{et} \quad v_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \quad \text{pour tout } n \text{ entier naturel} \end{cases} .$$

**1/ On note $(w_n)$ la suite ayant $\mathbb{N}$ pour domaine de définition et telle que, pour tout entier naturel :**

$$w_n = u_n - v_n .$$

**a) Calculer $u_1$ , $v_1$ , $w_0$ et $w_1$ .**

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \frac{15}{4} .$$

$$w_0 = u_0 - v_0 = -1 \quad \text{et} \quad w_1 = u_1 - v_1 = \frac{7}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}$$

**b) Montrer que $(w_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ .**

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_{n+1} + v_n}{2} = \frac{u_n - u_{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(u_n - u_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{u_n + v_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - v_n}{2} ;$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - v_n) \quad \Rightarrow \quad w_{n+1} = \frac{1}{4}\, w_n .$$

La suite $(w_n)$ est géométrique, de raison $q = \frac{1}{4}$ .

**c) Soit $\in \mathbb{N}$ . Exprimer $w_n$ en fonction de $n$ .**

En conséquence de b) : $w_n = w_0 . q^n = (-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow w_n = -\frac{1}{4^n}$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

**d) Préciser la limite de $(w_n)$ .**

$| q | < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ . La suite $(w_n)$ converge vers $0$ .

**2/ Etudier le sens de variation de $(u_n)$ et de $(v_n)$ .**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) = -\frac{1}{2}\, w_n .$$

Comme $w_n = -\frac{1}{4^n}$ est négatif pour tout entier naturel $n$ , on déduit : $u_{n+1} - u_n > 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ .

La suite $(u_n)$ est *croissante* .

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - v_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n + v_n}{2} - v_n\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u_n - v_n}{2} ;$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = \frac{1}{4}\, w_n .$$

Comme $w_n = -\frac{1}{4^n}$ est négatif pour tout entier naturel $n$ , on déduit : $v_{n+1} - v_n < 0$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ .

La suite $(v_n)$ est *décroissante* .

**3 – a) Justifier que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites adjacentes.**

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes si et seulement si :

- L'une est croissante quand l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

La première condition est satisfaite, puisque $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.

Par ailleurs :

$u_n - v_n = w_n$ et on a vu $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ .

Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**b) Que peut-on en déduire concernant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ ?**

Deux suites adjacentes ont même limite $L$ .

Comme $u_0 = 3$ et $v_0 = 4$ , on peut affirmer : $3 \leq L \leq 4$ .

**4/ On note $(t_n)$ la suite ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble de définition et telle que, pour tout entier naturel $n$ :**

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} .$$

**a) Démontrer que $(t_n)$ est constante.**

Il suffit de vérifier que $t_{n+1} = t_n$ , pour tout entier naturel $n$ , ce qui impliquera : $t_n = t_0$ donc constant.

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2\left(\frac{u_{n+1} + v_n}{2}\right)}{3} = \frac{2u_{n+1} + u_n + 3v_n}{6} .$$

Reportons $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \Leftrightarrow 2u_{n+1} = u_n + v_n$ .

$$t_{n+1} = \frac{(u_n + v_n) + u_n + 3v_n}{6} = \frac{2u_n + 4v_n}{6} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{, soit } t_{n+1} = t_n , \forall n \in \mathbb{N} .$$

On déduit $t_n = t_0 = \dfrac{u_0 + 2v_0}{3} = \dfrac{11}{3}$ , pour chaque $n$ entier, donc une suite *constante*.

**b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ .**

En passant $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} = \dfrac{11}{3}$ à sa limite, on obtient $\dfrac{L + 2L}{3} = \dfrac{11}{3} \Leftrightarrow 3L = 11 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L = \dfrac{11}{3}$ .