On considère la fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 3] par $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

1/ Calculer, si elles existent, les images par f des nombres suivants : -1 ; $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{3}+1$.

En reportant la valeur de x proposée dans l'expression $f(x) = (x-1)^2 - 4$, on obtient :

a) $f(-1) = (-1-1)^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

b) $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 - 4 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4} - 4 = \frac{9}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{7}{4}$.

c) $f(\sqrt{3}+1) = [(\sqrt{3}+1) - 1]^2 - 4 = (\sqrt{3})^2 - 4 = 3 - 4 = -1$.

2/ Montrer que 2 et 0 sont des antécédents de -3 .

On cherche les valeurs de x telles que $f(x) = -3$.

$f(x) = -3 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = -3 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow [(x-1)+1][(x-1)-1] = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$.

Un produit est nul si l'un ou l'autre des facteurs du produit est nul :

$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{cases} .$$

$y = -3$ admet deux antécédents par f sur l'intervalle de définition [-2 ; 3] . Ces antécédents sont $x = 0$ et $x = 2$.

3/ Déterminer les antécédents de 5 .

De même : $f(x) = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow [(x-1)+3][(x-1)-3] = 0$

$$(x+2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \\ \text{ou} \\ x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \end{cases} .$$

On remarquera que $x = 4$ n'appartient pas au domaine [-2 ; 3] de définition de f.

Le seul antécédent de $y = 5$ par f , qui appartienne à [-2 ; 3] est $x = -2$.

4/ On admet que le tableau de variation ci-dessous est celui de la fonction f :

x	-2		1		3
$f(x)$	5	↘	-4	↗	0

En justifiant votre réponse à l'aide de ce tableau et des résultats précédents, dire si les propriétés suivantes sont vraies ou fausses :

a) Si $x < \frac{5}{2}$ alors $f(x) \geq -\frac{7}{4}$

On voit sur le tableau de variation que f est *croissante* sur l'intervalle [1 ; 3] .

Donc l'ordre des images est *conservé* : $1 < x < 3 \Rightarrow f(1) < f(x) < f(3)$.

Comme $x = \frac{5}{2}$ appartient à l'intervalle [1 ; 3] , on déduit : $f(1) < f\left(\frac{5}{2}\right)$, soit $f(1) < -\frac{7}{4}$ d'après 1-b).

$x = 1$ vérifie $x < \frac{5}{2}$ et pourtant $f(1) = -4 = -\frac{8}{4}$ ne vérifie pas $f(x) \geq -\frac{7}{4}$ (contre-exemple) .

L'affirmation est FAUSSE.

b) Si $x < 3$ alors $f(x) > 0$

Affirmation également FAUSSE .

On donne un *contre-exemple* : $1 < 3$ et pourtant $f(1) < 0$ puisque $f(1) = -4$.

c) $f(-1) \leq f(0)$

D'après le tableau de variation, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2 ; 1]$, ce qui signifie que l'ordre des images est *inversé* : $-2 < x < x' < 1 \Rightarrow f(-2) > f(x) > f(x') > f(1)$.

$x = -1$ et $x' = 0$ appartiennent à l'intervalle $[-2 ; 1]$, donc :

$-2 < -1 < 0 < 1 \Rightarrow f(-2) > f(-1) > f(0) > f(1) \Rightarrow 5 > f(-1) > f(0) > -4$.

On obtient : $f(-1) > f(0)$.

On a d'ailleurs trouvé au 1/ : $f(-1) = 0$ et $f(0) = -3$.

L'affirmation est FAUSSE.