

**En évitant autant que possible d'utiliser la résolution des équations du second degré, par  $\Delta$ , résoudre les équations suivantes :**

a)  $e^{2x-5} = \frac{1}{e}$

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , ce qui fait qu'elle est injective :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b.$$

$$e^{2x-5} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{2x-5} = e^{-1} \Leftrightarrow 2x-5 = -1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2, \text{ soit } S = \{+2\}.$$

b)  $e^{2x-5} = -e$

Le résultat d'une exponentielle est toujours strictement positif, d'où :  $e^a > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

Comme  $-e$  est un nombre négatif, l'équation  $e^{2x-5} = -e$  ne peut admettre de solution  $x$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $S = \emptyset$ .

c)  $e^{2x^2} - e^{-4x+30} = 0$

$$e^{2x^2} - e^{-4x+30} = 0 \Leftrightarrow e^{2x^2} = e^{-4x+30}$$

Comme  $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ , on déduit  $2x^2 = -4x + 30 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 = 16^2 \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 16}{4} = 3 \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 16}{4} = -5 \end{cases}.$$

Soit  $S = \{-5; +3\}$ .

d)  $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0.$$

Comme  $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ , on déduit  $x = 0$ , soit  $S = \{0\}$ .

e)  $e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$

Par le second degré :

On pose  $X = e^x$ , ce qui impose  $X > 0$ .

Comme  $e^{2x} = (e^x)^2$ , on déduit :  $X^2 - (1 + e)X + e = 0$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + e)^2 - 4e = (1 + 2e + e^2) - 4e = e^2 - 2e + 1 = (e - 1)^2 > 0.$$

$$\text{Les racines sont } \begin{cases} X' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1 + e) + (e - 1)}{2} = e \\ X'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(1 + e) - (e - 1)}{2} = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} X' = e \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \\ X'' = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases} \cdot \text{ D'où } S = \{1; e\}.$$

Directement : (ce qui impose de "voir" une astuce)

$$e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - e^{x+1} + e = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - e^x) - (e^{x+1} - e) = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 1) - e(e^x - 1) = 0$$

$$\text{On déduit : } (e^x - 1)(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \\ e^x - e = 0 \Leftrightarrow e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases} \cdot \text{ D'où } S = \{1; e\}.$$

f)  $e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+2} + e^{2x+2}$ .

$$e^{3x+1} + e^{2x+1} = e^{x+2} + e^{2x+2} \Leftrightarrow e(e^{3x} + e^{2x}) = e^2(e^x + e^{2x}) \Leftrightarrow e \cdot e^x(e^{2x} + e^x) = e^2(e^{2x} + e^x).$$

On simplifie par  $e \neq 0$  :  $e^x(e^{2x} + e^x) = e(e^{2x} + e^x)$ .

On simplifie par  $e^{2x} + e^x > 0$  :  $e^x = e \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$ .

D'où :  $S = \{+1\}$ .