Dans chacun des cas suivants, donner le domaine de définition, puis résoudre l'équation ou l'inéquation :

a) ln (2x – 3) = -1

ln A est défini si et seulement si $A > 0$.

ln (2x – 3) n'est donc calculable que pour $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > +\frac{3}{2}$.

$D = [\ +\frac{3}{2}\ ; +\infty\ [$.

$\ln(2x - 3) = -1 \Leftrightarrow \ln(2x - 1) = -\ln e \Leftrightarrow \ln(2x - 1) = \ln\frac{1}{e}$.

La fonction ln x étant continue et strictement croissante, seuls deux nombres égaux peuvent avoir le même logarithme :

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (*injectivité* du logarithme) .

$\ln(2x - 1) = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow 2x = \frac{e+1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{e+1}{2e}$.

$S = \{ \frac{e+1}{2e} \}$.

b) ln (-2x^2 + 3x + 9) = ln 2 + ln (6 – x) .

ln A est défini si et seulement si $A > 0$.

L'équation précédente n'est donc définie que pour $\begin{cases} -2x^2 + 3x + 9 > 0 \\ \text{et} \\ 6 - x > 0 \end{cases}$.

Soit $-2x^2 + 3x + 9 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 72 = 81 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 9}{-4} = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 9}{-4} = +3 \end{cases}$.

x	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$-2x^2 + 3x + 9$		–	0	+	0	–	

Donc : $-2x^2 + 3x + 9 > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < +3$.

De même : $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$, ce qui ne modifie pas le domaine précédent.

On conclue : $D =]-\frac{3}{2}\ ; +3[$.

On sait : $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$, soit : $\ln(-2x^2 + 3x + 9) = \ln[2(6 - x)]$.

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$, d'où : $-2x^2 + 3x + 9 = 12 - 2x \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 3 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + 1}{-4} = +1 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - 1}{-4} = +\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Les deux solutions sont dans le domaine.

$S = \{ +1\ ; +\frac{3}{2} \}$.

c) $\ln|-2x^2 + 3x + 9| \leq \ln 2 + \ln(6 - x)$.

$\ln A$ est défini si et seulement si $A > 0$.

La valeur absolue rendant positive, il suffit d'imposer $-2x^2 + 3x + 9 \neq 0$ et $6 - x > 0$.

D'où : $D =]-\infty , -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2} ; +3[\cup]+3 ; +6[=]-\infty ; +6[- \{-\frac{3}{2} ; +3\}$.

On sait : $\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$, soit : $\ln|-2x^2 + 3x + 9| = \ln[2(6 - x)]$.

La fonction $\ln x$ est *continue* et *strictement croissante* , donc *conserve les ordres* : $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.

D'où : $|-2x^2 + 3x + 9| \leq 2(6 - x)$.

Les deux quantités sont positives, donc leur mise au carré conserve les ordres : $0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$.

$(-2x^2 + 3x + 9)^2 \leq 4(6 - x)^2 \Leftrightarrow (-2x^2 + 3x + 9)^2 - 4(6 - x)^2 \leq 0$,

$[(-2x^2 + 3x + 9) - 2(6 - x)][(-2x^2 + 3x + 9) + 2(6 - x)] \leq 0 \Leftrightarrow (-2x^2 + 5x - 3)(-2x^2 + x + 21) \leq 0$.

$(2x^2 - 5x + 3)(2x^2 - x - 21) \leq 0$.

Les racines de $2x^2 - 5x + 3 = 0$ sont $+1$ et $+\frac{3}{2}$.

Celles de $2x^2 - x - 21 = 0$ sont -3 et $+\frac{7}{2}$.

Posons $P(x) = (2x^2 - 5x + 3)(2x^2 - x - 21)$.

x	$-\infty$		-3		1		$3/2$		$7/2$		$+\infty$
$2x^2 - 5x + 3$		+	|	+	0	–	0	+	|	+	
$2x^2 - x - 21$		+	0	–	|	–	|	–	0	+	
$P(x)$		+	0	–	0	+	0	–	0	+	

Compte tenu du domaine D , on déduit : $S =]-3 , -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2} ; +1[\cup]+\frac{3}{2} ; +3[\cup]+3 ; +\frac{7}{2}[$.

$S =]-3 ; +1[\cup]+\frac{3}{2} ; +\frac{7}{2}[- \{-\frac{3}{2} ; +3\}$.