

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$.

1/ Etudier $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.

Si $x \rightarrow 1^+$ $\left\{ \begin{array}{l} e^x \rightarrow e \\ 1-x \rightarrow 0^- \end{array} \right\}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

Si $x \rightarrow 1^-$ $\left\{ \begin{array}{l} e^x \rightarrow e \\ 1-x \rightarrow 0^+ \end{array} \right\}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire des résultats ?

La courbe représentative admet une asymptote verticale $x = 1$.

2/ Etudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Si $x \rightarrow -\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} e^x \rightarrow 0^+ \\ 1-x \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Si $x \rightarrow +\infty$ $\left\{ \begin{array}{l} e^x \rightarrow +\infty \\ 1-x \rightarrow +\infty \end{array} \right\}$ d'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

On lève l'indétermination :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1-x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = -\infty \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative admet une asymptote horizontale $y = 0$ vers $-\infty$, mais devient $-\infty$ vers $+\infty$.

3/ Calculer la fonction dérivée de f et étudier son signe.

$$f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-x) - (-1)e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x(1-x) + e^x}{(1-x)^2} = \frac{e^x[(1-x) + 1]}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2-x)e^x}{(1-x)^2}.$$

Recherche des extrema :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^x = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ avec } y = f(2) = \frac{e^2}{1-2} = -e^2, \text{ soit } E(2; -e^2) \text{ pour extremum.}$$

Signe de la dérivée :

Comme $\frac{e^x}{(1-x)^2} > 0$, on déduit que $f'(x)$ est du signe de $2-x$.

$$\begin{cases} x < 2 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \\ x = 2 \Leftrightarrow f'(2) = 0 \\ x > 2 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

4/ Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗	$-e^2$	↘	$-\infty$

5/ Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'unités graphiques 1 cm .

