Calculer les dérivées de $f(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x}$ **,** $g(x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$ **et** $h(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$ **.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x}$:

$f = \dfrac{1}{U} \Rightarrow f' = -\dfrac{U'}{U^2}$ avec $U = \ln^2 x = (\ln x)^2$, d'où : $f'(x) = -\dfrac{[\ln^2 x]'}{\ln^4 x}$,

$U = u^2 \Rightarrow U' = 2uu'$ avec $u = \ln x$ et $u' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, d'où : $U' = 2(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2 \ln x}{x}$.

On déduit :

$$f'(x) = -\frac{\frac{2\ln x}{x}}{\ln^4 x} = -\frac{2\ln x}{x} \times \frac{1}{\ln^4 x} \text{ , soit : } f'(x) = -\frac{2}{x\ln^3 x} .$$

b) $g(x) = \dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$:

On sait : $(e^u)' = u'e^u$, d'où $(e^{-x})' = -e^{-x}$.

$g = \dfrac{u}{v} \Rightarrow g' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $g'(x) = \dfrac{-e^{-x}(e^{-x}-1) - (-e^{-x})(e^{-x}+1)}{(e^{-x}-1)^2} = \dfrac{-e^{-2x} + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}$,

$g'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{(e^{-x}-1)^2}$.

c) $h(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$:

On sait : $(e^U)' = U'e^U$ avec $U = \dfrac{u}{v} \Rightarrow U' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-1(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2} \Rightarrow \left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = -\frac{2}{(1+x)^2}\, e^{\frac{1-x}{1+x}} .$$