Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1 - e^x}$,

On sait $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{0}{1 - 0} = 0$.

L'expression n'est pas indéterminée.

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 - e^x}$,

On sait que $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. L'expression est *indéterminée* , de type $\frac{\infty}{\infty}$.

On force la factorisation de e^x au dénominateur :

$$\frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{e^x}{e^x\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} - 1} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x} = 0 .$$

On déduit : $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = \frac{1}{-1} = -1$.

c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$,

On sait $\displaystyle \lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ par continuité. On est en présence d'une *indétermination* de type $\frac{0}{0}$.

Il faut rapprocher cette indétermination de celle de la formule théorique d'une dérivée en un point :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} .$$

$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = exp'(0)$ avec $exp'(x) = (e^x)' = e^x$, d'où $exp'(0) = e^0 = 1$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$