Etudier les limites des fonctions f ci-dessous, en l'endroit a indiqué :

1/ $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - 2x$ $\qquad a = +\infty$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \end{cases}\right\} \text{d'où une forme indéterminée } \infty - \infty .$$

Comme $\sqrt{x^2} = |x|$, on peut penser que $f(x) \approx |x| - 2x = -x$ vers $+\infty$ devrait tendre vers $-\infty$.

$f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2x = x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2x$ vers $+\infty$.

$$f(x) = x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2\right) \text{ avec } \left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} - 2\right) = -1 \end{array}\right\}, \text{ d'où : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty .$$

2/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ $\qquad a = 0$

f admet une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $a = 0$.

On utilise la *quantité conjuguée* du numérateur :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \frac{(\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x})(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})}{x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \frac{(1 + x) - (1 - x)}{x(\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x})} = \frac{2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} .$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}} = \frac{2}{2} = 1 .$$

En posant $f(0) = 1$, on fait un *prolongement par continuité* en $a = 0$.

3/ $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 - x}$ $\qquad a = +\infty$

Comme $\sin x$ est bornée sur l'intervalle $[-1 ; +1]$, tandis que $1 - x$ tend vers $-\infty$ pour x tendant vers $+\infty$, on peut conjecturer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Preuve :

$-1 \leq \sin x \leq +1$ et $1 - x < 0$ vers $+\infty$, d'où : $\dfrac{1}{1 - x} \leq \dfrac{\sin x}{1 - x} \leq -\dfrac{1}{1 - x}$.

On déduit (*théorème des gendarmes*) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - x} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{1 - x} \leq -\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - x}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - x} = 0$.

$$0 \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{1 - x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{1 - x} = 0 .$$

4/ $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4}$ $\qquad a = +2$

f admet une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $a = +2$.

Tout polynôme nul en $x = +2$ admet $x - 2$ pour facteur :

$$f(x) = \frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-3}{x+2} \text{ pour } x \neq +2 .$$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x-3}{x+2} = \frac{1}{4}$ par continuité de cette dernière fonction en $x = +2$.

Remarque :

En définitive, on a remplacé la fonction $f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4}$ par la fonction $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$, qui lui est *partout égale* , à l'exception de $x = +2$ où f est indéterminée, tandis que g admet un résultat unique.

C'est un nouvel exemple de *prolongement par continuité* .

5/ $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{-5x^2+1}{x^2+2x+3}\right)^3}$ $\boldsymbol{a = +\infty}$

$$\frac{-5x^2+1}{x^2+2x+3} = \frac{x^2(-1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})} = \frac{-1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 .$$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-5x^2+1}{x^2+2x+3} = -5$ (*rapport des plu hauts degrés*).

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (-5)^3 = -125$.