Le plan est rapporté à un repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$.

On donne les points $A(-2\,;\,3)$ et $B(5\,;\,2\,)$.

1/ Calculer les coordonnées des points M , N et P tels que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A) = \overrightarrow{AB}(7\,;\,-1) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = 7\vec{i} - \vec{j}$.

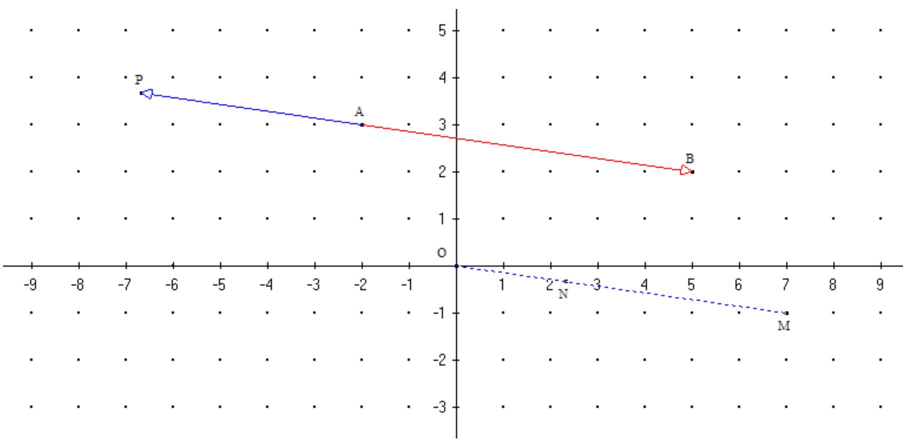
On sait que $\overrightarrow{OM} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \Leftrightarrow M(a\,;\,b)$ dans le repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$, d'où : $M(7\,;\,-1)$.

Au vu des calculs précédents : $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON}(\frac{7}{3}\,;\,-\frac{1}{3})$, soit : $N(\frac{7}{3}\,;\,-\frac{1}{3})$.

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow (x_P - x_A\,;\,y_P - y_A) = (x_N - x_M\,;\,y_N - y_M) \Leftrightarrow (x_P + 2\,;\,y_P - 3) = (\frac{7}{3} - 7\,;\,-\frac{1}{3} + 1) = (-\frac{14}{3}\,;\,\frac{2}{3})$.

$$\begin{cases} x_P + 2 = -\frac{14}{3} \\ y_P - 3 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = -2 - \frac{14}{3} = -\frac{20}{3} \\ y_P = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \end{cases} \text{ soit } P(-\frac{20}{3}\,;\,\frac{11}{3}) .$$

2/ Placer A , B , M , N , P sur une figure. Peut-on conjecturer l'alignement des points A , B et P ?



Le dessin laisse penser que les points A , P , B sont alignés.

3/ Vérifier l'alignement des points A , P et B.

a) Démonstration analytique (par le calcul)

Il suffit pour cela que $\overrightarrow{AP} = k\,\overrightarrow{AB}$.

On a vu $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(7\,,\,-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 7\vec{i} - \vec{j} \\ \overrightarrow{AP}(-\frac{14}{3}\,,\,\frac{2}{3}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = -\frac{14}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} \end{array} \right\}$. On déduit aisément : $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$.

b) Démonstration vectorielle (plus agréable)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{OM} + \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OM}$, soit : $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$, d'où l'alignement.